УДК 551.513: 556.013: 519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ КЛИМАТА, ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА: К 100-ЛЕТИЮ АКАДЕМИКА Г.И. МАРЧУКА

© 2025 г. В. П. Дымников*, В. Б. Залесный**

Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, ул. Губкина, 8, Москва, 119333 Россия

**e-mail: dymnikov.valentin@yandex.ru*

***e-mail: vzalesny@yandex.ru*

Поступила в редакцию 27.06.2024 г.
После доработки 06.12.2024 г.
Принята к публикации 05.03.2025 г.

Во вступительной статье к этому выпуску журнала “Известия РАН. Физика атмосферы и океана”, посвященному 100-летию со дня рождения академика Гурия Ивановича Марчука, описываются основные направления его научной деятельности, оказавшие значительное влияние на развитие современной геофизической гидродинамики. Это — прогноз погоды, моделирование климатической системы, приложение теории сопряженных уравнений к задачам геофизической гидродинамики, вычислительные алгоритмы. Обсуждаются идеи и математические методы современной геофизической гидродинамики, инициированные Г.И. Марчуком и развитые его научной школой на протяжении 25 лет XX в. и 25 лет XXI в. Отмечается яркий глубокий след, который он оставил в науке, и выделяются результаты, полученные им, его учениками и коллегами в области геофизической гидродинамики.

Ключевые слова: геофизическая гидродинамика, физика атмосферы и океана, математическое моделирование, вычисленные алгоритмы, сопряженные уравнения

DOI: 10.31857/S0002351525030011

1. ВВЕДЕНИЕ

Выдающийся ученый Гурий Иванович Марчук (рис. 1) оставил яркий след в развитии нескольких направлений современной науки. Его работы в области вычислительной математики [Марчук, 1989; Марчук, 2018a; Марчук, 2018b], математического моделирования климата, динамики атмосферы и океана [Марчук и Булеев, 1958; Марчук, 1964; Марчук, 1967; Марчук, 2018c], оказали значительное влияние на современную науку. В первую очередь, это относится к центральному направлению физики атмосферы и океана — математическому моделированию и численному решению задач прогноза погоды и изменений климата. Тесная связь вычислительной математики и геофизической гидродинамики является главной особенностью работ его научной школы и основанного им Института вычислительной математики РАН (с 2018 г. — ИВМ им. Г.И. Марчука РАН).

Рис. 1. Гурий Иванович Марчук (08.06.1925, с. Петро-Херсонец, ныне Грачёвского р-на Оренбургской обл. — 24.03.2013, Москва)

Характерной чертой научного мышления Г.И. Марчука является постоянный интерес к новым, неожиданным применениям математики. Он был уверен, что язык математики есть язык любой современной науки, и активно работал в разных областях ее приложений. На протяжении долгого периода остаются востребованными его работы в области теории и методов расчета ядерных реакторов, метеорологии, океанологии, геофизической гидродинамики и теории климата, математического моделирования в иммунологии и медицине.

Нейтронная физика, климат, жизнь и математика, как фундаментальный инструмент их описания и моделирования, — путь научного творчества нашего учителя, памяти которого посвящается данный номер журнала “Известия РАН. Физика атмосферы и океана”.

В статье представлены основные направления научных исследований Г.И. Марчука и его научной школы в области геофизической гидродинамики, физики атмосферы и океана. Это — прогноз погоды; моделирование климатической системы; математические задачи теории климата; приложение теории сопряженных уравнений к задачам геофизической гидродинамики; математическое моделирование и численные алгоритмы динамики атмосферы и океана. Основное внимание уделяется обсуждению идей и методов геофизической гидродинамики, инициированных Г.И. Марчуком и развитых его научной школой на протяжении 50 лет: последних 25 лет XX в. и первых 25 лет XXI. Отмечается яркий глубокий след, который оставил Гурий Иванович в науке и выделяются несколько результатов, полученных им, его учениками и коллегами в области прогноза погоды, математического моделирования динамики атмосферы и океана, климатической изменчивости.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Сверхзадачи. Гурий Иванович всегда стремился формулировать и решать “сверхзадачи”, часто лежащие на стыке разных научных направлений. Он утверждал, что, даже если сверхзадача не будет решена, она позволит решить множество более простых задач, представляющих значительный научный интерес.

Отметим некоторые “сверхзадачи”, в постановке и решении которых принимал непосредственное участие Г.И. Марчук. В отличие от классической математики, специфика современных задач вычислительной математики и ее приложений к геофизической гидродинамике в том, что они являются приближенными и решаются с определенной точностью. Метод их решения — приближенный, но его устойчивость, сходимость и точность доказываются математически строго. Важной характеристикой работ научной школы Г.И. Марчука является особое внимание к доказательствам существования и единственности решения, изучению чувствительности решения к возмущению входных данных, поиск новых формулировок задач — прямых, сопряженных, вариационных. Современные задачи геофизической гидродинамики описываются сложными системами дифференциальных уравнений и являются с математической точки зрения неклассическими. Практика требует все более полного и точного их решения, представления результатов в адекватной природе форме: в виде функционалов от решения, вероятностных норм и т.д. Верификация моделей по отношению к данным наблюдений — сложная и дорогая. Часто здесь возникают различные конфликты: природа — модель, сложность модели — ее разрешимость, ассимиляция данных наблюдений — экономичность алгоритма и т.д.

Приведем пример. К середине XX столетия пришло осознание того факта, что важной проблемой прогноза погоды и климата Земли является неустойчивость траектории прогностической системы к малым возмущениям начальных данных и внешних источников. Практика показала, что для повышения качества моделирования следует обогащать физическую постановку задачи. Так, необходимо было перейти от простых квазигеострофических уравнений к полным уравнениям гидротермодинамики. Даже для задач краткосрочного прогноза погоды в модель следовало включать неадиабатические притоки тепла, что значительно усложняло математическую формулировку задачи.

При этом возникает конфликт, с которым сталкиваются современные исследователи. Основная тенденция развития моделей геофизической гидродинамики, прогноза погоды и климата состоит в непрерывном усложнении моделирующих систем. В результате обогащения новыми физическими процессами и параметризациями модели описываются все более сложными системами дифференциальных уравнений и требуют более точных численных методов решения. Для поиска начальных условий и корректировки внешних источников в прогностических моделях необходимо ассимилировать данные наблюдений. Прогностические системы еще более усложняются — они включают прямые и сопряженные уравнения, вызывают переход от классических задач Коши к задачам четырехмерного вариационного анализа.

С математической точки зрения, однако, модель должна быть доступной для строгих теорем, доказательства ее разрешимости, устойчивости, аналитического исследования особенностей ее решения. Аналитические исследования позволяют лучше понять качественное поведение решения, правильно выбрать математическую постановку задачи и эффективный метод ее численного решения.

Прогноз погоды и математические методы. Уже в ранней совместной с Н.И. Булеевым работе [Марчук и Булеев, 1958], проявляется связь физики, метеорологии и математики, которая прослеживается и укрепляется во всей его дальнейшей научной деятельности. Началом теоретических исследований в области прогноза погоды под руководством Г.И. Марчука можно считать работу [Марчук, 1964]. В ней сформулирована неадиабатическая модель краткосрочного прогноза погоды по полным уравнениям. Модель описывала процессы переноса и трансформации полей влажности в атмосфере, переноса излучения, радиационных и фазовых притоков тепла. Система уравнений была достаточно сложной, и в качестве метода решения был применен метод расщепления по физическим процессам и геометрическим переменным. Разработанная под руководством Гурия Ивановича система краткосрочного прогноза погоды впоследствии была внедрена в оперативную практику Западно-Сибирского управления Гидрометеослужбы. Результаты, полученные Г.И. Марчуком в области численных методов решения задач прогноза погоды [Марчук, 1967], сейчас уже стали классическими. В той или иной форме метод расщепления по физическим процессам в настоящее время используется почти во всех мировых моделях климата и общей циркуляции атмосферы и океана. Важно отметить, что создание практической системы прогноза сочеталось с изучением разрешимости задач прогноза погоды [Демидов и Марчук, 1966] и разработкой эффективных численных алгоритмов [Марчук, 1989; Марчук, 2018а; Марчук, 2018с].

Взаимодействие атмосферы и океана. Математические модели и наблюдения. В области математического моделирования общей циркуляции атмосферы и океана можно выделить четыре основных направления, несомненный приоритет в которых принадлежит Г.И. Марчуку. Три из них связаны с теоретическими исследованиями. Это — анализ корректности математических задач; создание экономичных схем их численного решения на основе неявных методов расщепления; формулировка и решение прямых и обратных задач с помощью метода сопряженных уравнений. Четвертое направление базируется на сочетании фундаментальных теоретических исследований и натурного эксперимента. Примером является инициированная Г.И. Марчуком крупнейшая в истории развития российской науки о климате научно-наблюдательная программа “Разрезы” [Марчук и др., 1984]. Идея программы основана на теории сопряженных уравнений [Марчук, 2018b].

Процессы взаимодействия атмосферы и океана имеют глобальный характер, и в этом сложность их наблюдения и изучения. Используя идею метода сопряженных уравнений, наблюдения можно сосредоточить в локализованных областях океана, которые оказывают максимальное влияние на изучаемый функционал. Подобласти максимального влияния в программе “Разрезы” получили название энергоактивных зон океана (ЭАЗО) [Марчук и др., 1984].

Заметим, что если бы исследования касались только атмосферы, то локализовать изучаемые подобласти было бы довольно трудно, если не невозможно. Однако проблема изучалась в рамках крупномасштабного взаимодействия атмосферы и океана, и выделить зоны наблюдений было проще. Основываясь на опыте, в качестве ЭАЗО, в которых на протяжении нескольких лет проводились наблюдения, были выбраны 5 зон: Норвежская, Ньюфаундлендская, Тропики Атлантики, Гольфстрим и Куросио [Марчук и др., 1984]. В результате экспедиционных исследований и анализа данных было улучшено понимание процессов взаимодействия атмосферы и океана и их моделирование. Важным результатом экспедиций, в частности, было обогащение массива наблюдений морской солености в открытом океане (*in situ*).

Новые постановки задач. Сопряженные уравнения. Важное направление в изучении проблемы взаимодействия атмосферы и океана, инициированное Г.И. Марчуком, основано на использовании сопряженных уравнений динамики атмосферы и океана. Суть подхода состоит в следующем. Для некоторого эволюционного уравнения, например, переноса — диффузии тепла (в атмосфере и океане), формулируется задача апостериорного анализа, которая решается в обратном времени [Марчук, 2018c]. Изучается не само решение, а вариации функционала от него — потока тепла на поверхности раздела двух сред. Требуется найти область максимального влияния на значение функционала. Определить, в каких точках изменение внешних источников максимально изменяет величину функционала.

Легко показать преимущество постановки данной задачи в терминах сопряженных уравнений. Если решать прямую задачу, то требуется перебрать все множество точек, из которых приходит сигнал от источника. При постановке задачи в терминах сопряженного по Лагранжу уравнения, достаточно решить лишь одну задачу в обратном времени! Требуется найти решение сопряженного уравнения переноса-диффузии тепла при заданной скорости (с обратным знаком) и интенсивности вертикального теплообмена, предполагая, что эти характеристики близки к природе. Решение сопряженного уравнения описывает вклад каждой точки области в значение функционала. Эта красивая идея и была положена в основу научно-наблюдательной программы “Разрезы” [Марчук и др., 1984].

3. МОДЕЛЬ КЛИМАТА — СВЕРХЗАДАЧА ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Связь моделирования и наблюдений. В середине XX в. произошли революционные события, определивших дальнейшее развитие математических методов и моделирования физических процессов геофизической гидродинамики.

Во-первых — это техническая революция в вычислительной технике и глобальных системах наблюдений. В вычислительной технике — переход на полупроводники, а затем создание многопроцессорных вычислительных платформ. В глобальных наблюдениях — появление информационных систем, расположенных на спутниках, плавающих буях, дрифтерах и т.д.

Во-вторых — открытие Э. Лоренцом странного аттрактора [Lorenz, 1963]. Оно стимулировало изучение скорости роста начальных возмущений в моделях прогноза погоды и общей циркуляции атмосферы. Возрос интерес к новым постановкам задач, связанных со сверхбольшими интервалами времени, новыми концептуальными моделями, изучением собственной нелинейной динамики. Отметим, что долгое время это открытие было достоянием только метеорологической научной среды.

В-третьих — развитие теории и методов синтеза данных наблюдений и вычислительных экспериментов. Фундаментальным теоретическим подходом здесь служит четырехмерная вариационная ассимиляция данных наблюдений в математических моделях. Для прогностических моделей погоды и морских течений синтез наблюдений и расчетов — принципиален. Он позволяет определить начальные условия и уточнить источники. Климатические модели направлены на изучение собственной изменчивости системы и ее реакции на антропогенное воздействие. Они требуют расчетов на сотни и тысячи лет и для них более важны экономичность и устойчивость вычислений, а в перспективе — управление решением.

Указанный прогресс стимулирует возникновение и развитие крупного направления, сочетающего методы геофизической гидродинамики, математики, вычислительной техники и глобальных измерительных систем. По терминологии Г.И. Марчука — это сверхзадача геофизической гидродинамики.

От среднесрочного прогноза погоды к модели климата Земли. В конце 60-х — начале 70-х гг. XX в. на основе большой серии численных экспериментов было выработано представление, что предел "детерминированной" предсказуемости атмосферной динамики составляет примерно две недели. На повестку дня вышла задача создания модели среднесрочного прогноза погоды

(1–7 сут). Базой создания таких моделей должна была стать быстро развивающаяся вычислительная техника, глобальные наблюдательные сети, разработка параметризаций подсеточных процессов, объективного анализа данных наблюдений и др. Наиболее ярко эта программа была осуществлена в созданном в 1975 г. Европейском центре среднесрочных прогнозов погоды (ЕЦСПП). Работа была выполнена под руководством Л. Бенгтсона, и в результате создана высокая технология — система четырехмерного усвоения данных. Разработка этой технологии позволила вывести прогностическую систему Европейского Центра на первое место в мире. Важно отметить, что решение данной проблемы стало возможно только на основе результатов Первого глобального эксперимента ПИГАП (ПГЭП). Данные ПГЭП позволили повысить качество модели ЕЦСПП и обогатить ее эффективным алгоритмом ассимиляции асинхронных данных наблюдений. Постепенно на основе среднесрочного прогноза погоды формируется новое направление геофизической гидродинамики и его сверхзадача — разработка вычислительной модели климата Земли.

Заметное место в развитии этого направления принадлежит работам Г.И. Марчука, его учеников и последователей: библиографию см. в [Марчук и др., 1975; Марчук и др., 1984; Марчук, 2018с]. Главным результатом их деятельности явилось создание глобальной модели климата Земли. Ее первая версия — теоретическое описание (система уравнений) и численные алгоритмы — представлена в [Марчук и др., 1975], а вместе с результатами вычислительного эксперимента в [Марчук и др., 1984]. По договоренности Г.И. Марчука и Л. Бенгтсона основная часть расчетов была проведена в 1979–1981 гг. в ЕЦСПП (Рединг, Англия).

Модель климата Земли. Развитие глобальной климатической модели было начато в Вычислительном центре Сибирского отделения АН СССР (ВЦ СО АН СССР) и продолжено в Институте вычислительной математики, ныне им. Г.И. Марчука, РАН (ИВМ РАН). Первая версия модели состояла из двух больших подсистем, описывающих динамику атмосферы и океана. Обе были основаны на “примитивных” уравнениях гидродинамики, соответственно атмосферы и океана. В число основных частей модели входили также блоки, описывающие процессы солнечной радиации и динамики пограничного слоя атмосфера–океан [Марчук и др., 1975; Марчук и др., 1984].

Уравнения модели записывались в сферической системе координат, пространственное разрешение для атмосферы было 10*6*3, а для океана 5*5*8 (в градусах, соответственно, вдоль широты и долготы и по вертикали). Совместная модель предназначалась для длительного интегрирования по времени (годы для атмосферы, десятки-сотни лет – для океана). Процесс вычислений поэтому должен был быть устойчивым и экономичным. Пятьдесят лет назад мощность вычислительных машин была мала, и фактор экономичности играл решающую роль. Экономичность модели достигалась за счет неявных схем расщепления. Прогностические уравнения расщеплялись по физическим процессам и геометрическим координатам. За исключением параметризаций, основные уравнения модели ВЦ СО АН СССР — ИВМ РАН были близки к американской модели GFDL Манабе–Брайена [Manabe and Bryan, 1969]. Главные отличия двух моделей состояли с физической точки зрения в параметризациях подсеточных процессов, а с вычислительной — в использовании метода расщепления и неявных схем по времени.

Первая версия климатической модели ВЦ СО АН СССР — ИВМ РАН, и решение первой сверхзадачи породили к настоящему времени несколько новых моделей, задач и даже направлений. Современная климатическая модель ИВМ РАН обогащена новыми блоками, физическими параметризациями и численными алгоритмами. Результаты использования одной из ее версий приведены в данном выпуске журнала [Володин и др., 2025]. Мы не будем ее подробно описывать, уделив далее основное внимание модели океана.

К настоящему времени океанический блок климатической модели существенно модернизирован. Его развитие проведено в двух основных направлениях. Во-первых, блок оснащен новыми физическими процессами, параметризациями и алгоритмами для решения прогностических и климатических задач [Мошонкин и др., 2018; Залесный и др., 2016; Гусев и др., 2025]. Во-вторых, он значительно развит и используется для решения задач четырехмерной вариационной ассимиляции данных наблюдений [Agoshkov et al., 2009; Agoshkov and Zalesny, 2012; Shutyaev et al., 2023; Пармузин и др., 2020; Агошков и др., 2025].

4. МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ

Метод расщепления предназначен для решения сложных систем дифференциальных уравнений и разработан советскими математиками Н.Н. Яненко, А.А. Самарским, Г.И. Марчуком и др. Подробное описание метода можно найти в работах Г.И. Марчука [Марчук, 1989; Марчук, 2018а]. Метод имеет различные разновидности, например, расщепление по координатам и расщепление по физическим процессам. Он применяется как для расщепления дифференциальных уравнений (и в этом случае называется методом слабой аппроксимации), так и аппроксимирующих их обыкновенных дифференциальных уравнений (после дискретизации по пространству). Метод особенно экономичен, если на отдельных этапах расщепления используются неявные схемы по времени или точные решения [Залесный и др., 2016; Мошонкин и др., 2018]. Многочисленные расчеты на сверхбольшие интервалы по времени, показывают высокую устойчивость и эффективность вычислений [Marchuk et al., 2003].

На методе расщепления основана первая версия климатической модели ВЦ СО АН СССР — ИВМ РАН [Марчук и др., 1975; Марчук и др., 1984], а также глобальная и региональные модели океана ИВМ РАН, используемые в автономном режиме [Залесный и др., 2016; Мошонкин и др., 2018]. На его основе в ИВМ РАН успешно развивается методология решения прямых и обратных задач общей циркуляции океана. Кратко опишем ее, не касаясь специальных вопросов аппроксимации, устойчивости и сходимости решения к дифференциальным задачам.

Суть методологии заключается в приведении сложной задачи к набору более простых задач [Марчук, 1989]. Оператор задачи представляется в виде суммы элементарных операторов. Требуется, чтобы исходная система уравнений была записана в эволюционной форме, а оператор каждой подсистемы был неотрицательным. Временной интервал разбивается на ряд подынтервалов. Для неявных схем расщепления их число равняется числу элементарных подсистем, для схемы двуциклического расщепления оно удваивается. При расщеплении по физическим процессам отдельная подсистема описывает некоторый физический процесс: перенос, диффузию, баротропную динамику длинных волн, бароклинное приспособление полей масс и течений и т.д. Каждая расщепленная задача последовательно решается на определенном подынтервале по времени. Некоторые из расщепленных подсистем могут расщепляться повторно, например по отдельным координатам. В этом случае метод называется методом многокомпонентного расщепления [Марчук, 1989].

Особенности метода расщепления. При повторном расщеплении до локально-одномерных (по пространству) задач можно использовать безусловно устойчивые неявные схемы. Если неявные схемы применяются на каждом шаге расщепления, то общий алгоритм решения полной задачи будет устойчивым независимо от шага по времени. В этом случае выбор шага по времени происходит из условий аппроксимации решения исходной дифференциальной задачи.

Вопросы аппроксимации при использовании методов расщепления для решения сложных физических задач оказываются далеко не тривиальными. Они требуют специального изучения, если ставится вопрос о выборе эффективной схемы вычислений. Практика показывает, что при решении прогностических задач шаг по времени может быть в несколько раз больше по сравнению с моделями, использующими явные схемы.

Еще больший выигрыш неявные модели дают при решении задач четырехмерной вариационной ассимиляции данных. Во-первых, неявные схемы позволяют в несколько раз уменьшить размерность минимизируемого функционала. В рамках вариационной технологии вариационная задача является краевой и решается в четырехмерной области (по пространству и времени). Поскольку количество точек по времени зависит от величины шага, неявный метод позволяет существенно уменьшить их количество. Во-вторых, для неявных схем уменьшается вычислительный шум, присущий явным методам. Шум снижает эффективность алгоритмов решения систем оптимальности, возникающих в задачах вариационной ассимиляции данных [Дымников и Залесный, 2019].

Следует отметить, что неявные схемы расщепления плохо реализуются на многопроцессорных вычислительных системах. Проблема распараллеливания методов расщепления заставляет искать компромиссы, связанные с комбинированием неявных, полунеявных и явных схем расщепления. Для создания гибкой численной модели, способной эффективно решать прямые и обратные задачи, целесообразно иметь несколько вариантов расщеплений.

Модель океана — расщепление по физическим процессам. Атмосферная и океанская циркуляции формируются в мелком вращающемся сферическом слое Земли. Если с точки зрения физики, динамика атмосферы более нелинейна и сложна, то с вычислительной точки зрения, особые сложности вызывает динамика океана.

Динамика океана имеет ряд специфических особенностей, отличающих ее от атмосферной [Sarkisyan and Suendermann, 2009; Марчук и др., 2013]. Во-первых, задачи динамики океана — это краевые задачи, причем очертания границы области играют важную роль в динамике реальных процессов. Во-вторых, в отличие от динамики атмосферы, в динамике океана наибольшее внимание уделяется изучению вынужденных движений, зависящих от внешних источников. Малый масштаб энергонесущих движений в морях и океанах требует тонкого пространственного разрешения и эффективных численных алгоритмов, особенно для задач оперативной океанографии [Марчук и др., 2013; Коротаев и Минюк, 2025].

Современные модели циркуляции океана имеют свои яркие особенности. Динамика в них описывается примитивными уравнениями, отличающимися от классических уравнений Навье-Стокса. В первых двух уравнениях движения учитывается эффект вращения Земли, обусловленный ускорением Кориолиса. Третье уравнение движения, отражая специфику “мелкого сферического слоя” океана, упрощается. В нем исключается производная по времени, и оно сводится к стационарному уравнению гидростатики. Верхняя граница области — уровень моря, является свободной границей и входит в число искомых функций. Эффекты турбулентной вязкости описываются более сложными операторами (по сравнению с оператором Лапласа с постоянным коэффициентом). Уравнения движения дополняются уравнениями для температуры, солености и плотности морской воды, описывающими бароклинные эффекты [Sarkisyan and Suendermann, 2009].

Пространственные аппроксимации дифференциальных уравнений строятся непосредственно для примитивных систем уравнений. Основной тенденцией развития современных моделей является переход от простых конечно-разностных сеток к неструктурируемым, как правило, треугольным сеткам. Балансные пространственные аппроксимации исходных уравнений способствуют выполнению дискретных аналогов энергетических соотношений. В невязком случае это — законы сохранения, справедливые для дифференциальной задачи.

Недостаточное пространственное разрешение вызывает вычислительный шум, искажающий описание структуры гидрофизических полей. Отношение характерного масштаба вихревой океанической циркуляции к размеру океана очень мало: $\sim 10^{-2} - 10^{-4}$. Это приводит к тому, что для равномерного покрытия океана необходима расчетная сетка размером $\sim 10^3 \times 10^5$, что составляет $\sim 10^8$ точек по горизонтали. С учетом современного разрешения по вертикальной координате (~100 слоев) общее количество точек для одной расчетной функции в один момент времени становится равным $\sim 10^{10}$.

Важным вопросом, возникающим при решении задач динамики океана, является выбор схемы по времени. Преимуществом явных схем является простота их распараллеливания и эффективное использование современных многоядерных вычислительных платформ. Но при увеличении пространственного разрешения эти схемы требуют значительного уменьшения шага по времени. Для решения прямых прогностических задач выигрыш эффективности распараллеливания часто превышает потери из-за уменьшения временного шага. Однако в задачах четырехмерной вариационной ассимиляции применение явных схем приводит к более значительным потерям. Это касается как эффективности итерационного решения систем оптимальности, так и увеличения шумовых эффектов.

Технология расщепления по физическим процессам дает естественную возможность построения иерархии численных моделей динамики океана различного физического уровня. Она предоставляет хорошие перспективы для развития программного продукта. Оператор исходной задачи представляется в виде суммы более простых операторов таким образом, чтобы на каждом отдельном этапе расщепленная система уравнений могла служить самостоятельной моделью. Эта методология развита и успешно использована при моделировании динамики различных масштабов от мезо— и субмезомасштабных [Марчук и др., 2013; Залесный и др., 2016] до глобальных [Marchuk et al., 2003; Марчук и Залесный, 2012].

Суммируем основные особенности метода расщепления.

(1) Методологической основой построения численных моделей различного уровня сложности является метод расщепления. Метод расщепления рассматривается не только как метод решения сложной задачи по времени, но и как основа построения иерархической модельной системы. В рамках единого подхода формируется конкретная модель динамики океана различной сложности: ее физической полноты, размерности и пространственного разрешения.

(2) Метод расщепления формулируется для решения эволюционных систем уравнений с неотрицательными операторами. Данное свойство априори устанавливается для рассматриваемой дифференциальной задачи. Находится интегральный инвариант или закон сохранения, справедливый при отсутствии внешних источников и внутренних стоков энергии.

(3) При использовании метода расщепления важную роль играет выбор формы записи дифференциальной задачи. Для моделей ОЦО весьма удобной является симметризованная форма уравнений [Марчук и Залесный, 2012; Дымников и Залесный, 2019]. Симметризованная форма уравнений позволяет расщепить сложную систему уравнений на ряд более простых подсистем с неотрицательными операторами.

(4) Дискретная аппроксимация симметризованной формы сохраняет основные свойства исходных дифференциальных операторов: симметрию, кососимметрию, неотрицательность, положительную определенность; она приводит к аналогичной форме сопряженных операторов.

(5) Ключевым моментом построения расщепляемой иерархической модельной системы является разбиение исходной системы на совокупность простых подсистем. Часто выбор такого расщепления является нетривиальным и не единственным.

(6) Процесс многокомпонентного расщепления сводится к выбору частичных задач более простой структуры. Для каждой выделенной задачи должен выполняться установленный закон сохранения (или энергетическое соотношение). При расщеплении может выделяться несколько уровней различной глубины. Макроуровень — это расщепление по физическим процессам. На нижнем уровне возможно выделение простейших, одномерных по пространству задач.

(7) После расщепления исходной системы уравнений может возникнуть необходимость в преобразовании расщепленных подсистем. Это может выражаться, например: в упрощении задачи на отдельном этапе или ее ε-регуляризации — включении дополнительных слагаемых, улучшающих свойства ее решения.

(8) После регуляризации этапов расщепления встает вопрос о выборе метода решения задачи на выделенном этапе. Разные задачи (на отдельных этапах) могут требовать разных методов аппроксимации и алгоритмов решения. В общем случае в совокупной модели могут комбинироваться схемы конечных разностей, конечных элементов, конечных объемов; отдельные задачи могут аппроксимироваться с повышенным порядком точности и т.д.

(9) Естественным свойством расщепленной модели является ее модульный принцип: отдельная задача — отдельный модуль. Каждая задача может иметь свой сопряженный аналог. Совокупная модель может состоять из различного количества модулей. Вычислительные характеристики модели можно улучшать за счет изменения отдельных расчетных модулей.

5. МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ И ЗАДАЧИ АССИМИЛЯЦИИ

Особая роль метода расщепления проявляется при решении задач четырехмерной вариационной ассимиляции [Agoshkov et al., 2009; Пармузин и др., 2020; Shutyaev et al., 2023; Агошков и др., 2025]. Опыт показывает, что сочетание неявных методов расщепления и сопряженных уравнений упрощает построение сопряженной модели и повышает эффективность итерационного алгоритма решения системы оптимальности.

Рассмотрим задачу для уравнения переноса-диффузии температуры. Прямое уравнение, записанное в симметризованной форме, имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial x}(uT)+u\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{v}T)+\\ +\mathrm{v}\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}(\omega T)+\omega\frac{\partial T}{\partial z}\end{array}\right]= \\ =\Lambda T+Q,\ 0<t\le\bar{t}, \qquad (1)$$

$$T=T^0,\ \text{при}\ t=0, \qquad (2)$$

$$L_x=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(uT)+u\frac{\partial T}{\partial x}\right],\ L_y=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{v}T)+\mathrm{v}\frac{\partial T}{\partial y}\right], \\ L_z=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z}(\omega T)+\omega\frac{\partial T}{\partial z}\right],$$

$$\Lambda_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial}{\partial x}\right),\ \Lambda_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \Lambda_z=\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Здесь T^0 — начальная температура: $T\in\Omega(x,y,z)\times[0,\bar{t}]$, $T^0\in\Omega$, $Q\in\Sigma$ — правая часть, описывающая влияние источников (например, потока тепла) на границе океана Σ, $\Lambda=\Lambda_x+\Lambda_y+\Lambda_z$ — оператор турбулентной диффузии.

Пусть выполняется условие неразрывности, а коэффициенты турбулентной диффузии — положительны: $\mu>0,\nu>0$. Симметризованная форма оператора переноса позволяет выделить положительные операторы по каждой координате x, y, z

$$A_x=\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}u\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

$$A_y=\frac{1}{2}\left(\mathrm{v}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{v}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

$$A_z=\frac{1}{2}\left(w\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}w\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

$$L_x+\Lambda_x=-L_x^*+\Lambda_x^*\ge 0,\ L_y+\Lambda_y= \\ =-L_y^*+\Lambda_y^*\ge 0,\ L_z+\Lambda_z=-L_z^*+\Lambda_z^*\ge 0,$$

и применить для решения метод покоординатного расщепления. Покоординатное расщепление позволяет использовать на каждом этапе абсолютно устойчивые неявные схемы.

Если T^0 известно, то (1)–(2) — классическая задача Коши. Однако в задачах динамики атмосферы и океана полная информация о начальном условии и правой части может отсутствовать. В этом случае (1)–(2) называют задачей с неполной информацией, и ее нужно некоторым образом преобразовать.

Для уравнения (1) вместо задачи Коши рассмотрим следующую. Пусть температура T^0 в начальный момент времени и источники Q известны лишь приближенно. Недостаток информации компенсируем за счет данных наблюдений. Пусть известны оценки средней температуры по времени: T_{obs}, начального состояния T_{obs}^0 и источника, например, потока тепла на поверхности океана Q_{obs}.

Сформулируем задачу вариационной ассимиляции. Найти такое решение (1)–(2), зависящее от начального поля $T^0\in\Omega$ и источника Q, при котором достигается минимум функционала J

$$J=\frac{1}{2|\Omega|}\left[\int\limits_{\Omega}\varepsilon(T^0-T_{obs}^0)^2 d\Omega+\frac{1}{\bar{t}}\int\limits_0^{\bar{t}}\int\limits_{\Omega}(T-T_{obs})^2 d\Omega dt\right]+ \\ +\frac{1}{2|\Sigma|}\int\limits_{\Sigma}\gamma(Q-Q_{obs})^2 d\Sigma\to\min. \qquad (3)$$

Здесь $\varepsilon<<1$, $\gamma<<1$ — параметры регуляризации, $|\Omega|,|\Sigma|$ — размеры Ω,Σ, $[0,\bar{t}]$ — интервал ассимиляции. Разделим $[0,\bar{t}]$ на N отрезков $t_n\le t\le t_{n+1}$ длиной $\tau=t_{n+1}-t_n$, где N — число шагов по времени на интервале усвоения $N\tau=\bar{t}$ и перепишем J в виде

$$J=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}\left[\varepsilon(T^0-T_{obs}^0)^2+\frac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{N}(T^j-T_{obs})^2\right] \\ d\Omega+\frac{1}{|\Sigma|}\int\limits_{\Sigma}\gamma(Q-Q_{obs})^2 d\Sigma\end{array}\right\}\to\min.$$

Используя метод Лагранжа, можно привести задачу к решению системы оптимальности — связанной системы прямых и сопряженных уравнений [Дымников и Залесный, 2019]. Пусть операторы A_x,A_y,A_z в (1) аппроксимированы по пространству (граничные условия — однородны), тогда неявная схема покоординатного расщепления будет иметь вид:

$$\left(E+\tau A_z\right)\left(E+\tau A_y\right)\left(E+\tau A_x\right)T^j-T^{j-1}-\tau Q=0,$$
$$j=\overline{1,N}, \tag{4}$$

$$\left(E+\tau A_x{}^*\right)\left(E+\tau A_y{}^*\right)\left(E+\tau A_z{}^*\right)T^{*j}-T^{*j+1}+$$
$$+\frac{\tau}{L|\Omega|}\left(T^j-T^j_{obs}\right)=0,\ j=\overline{1,N}, \tag{5}$$

$$T^{*N+1}=0, \tag{6}$$

$$-T^{*1}+\frac{\varepsilon\tau}{|\Omega|}\left(T^0-T^0_{obs}\right)=0. \tag{7}$$

Если Q в (4) известна, то определить нужно только начальное условие T^0. В этом случае мы приходим к задаче вариационной инициализации, которая имеет ясный физический смысл. Система (4)–(7) аппроксимирует четырехмерную краевую задачу в области $\Omega(x,y,z)\times[0,\bar{t}]$. Соотношения (6)–(7) являются краевыми условиями по времени. Система (4)–(7) замкнута, разрешима, и ее решением является вектор-функция с компонентами $\left(T^0,T^j,T^{*j}\right)$. Отметим два простых случая.

1. Пусть информация о начальных данных T^0_{obs} отсутствует, т.е. $\varepsilon=0$ в (3). Тогда (4)–(7) является задачей Дирихле по времени.

2. Пусть Q в (4) описывает поток тепла на поверхности, а другие источники отсутствуют. Если Q неизвестно, т.е. $\gamma=0$ в (3), то для замыкания (4)–(7) требуется дополнительное условие. Оно вытекает из граничного условия для решения сопряженного уравнения на поверхности океана $z=0$ и имеет вид

$$-T^{*j}_{\ z=0}+\frac{\gamma\tau}{|\Sigma|}(Q-Q_{ods})=0. \tag{8}$$

На практике задачу вариационной ассимиляции не сводят к замкнутой алгебраической системе вида (4)–(7), а решают итерационно [Шутяев, 2001]. Применяя метод градиентного спуска, определим процесс решения задачи следующим образом. Соотношения (7), (8) используем для вычисления градиента функционала J. Выделим вектор управления решением — в данном случае $\left(T^0,Q\right)$, и относительно него сформулируем итерационный процесс

$$\left(T^0,Q\right)^{k+1}=\left(T^0,Q\right)^k-\mu\ grad\,J, \tag{9}$$

$$grad\,J\equiv\begin{pmatrix}-T^{*1}+\dfrac{\varepsilon\tau}{|\Omega|}\left(T^0-T^0_{obs}\right),\\ -T^{*j}_{\ z=0}+\dfrac{\gamma\tau}{|\Sigma|}(Q-Q_{ods})\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Если с учетом (4)–(7), процесс (9)–(10) сходится, то он определяет расширенное решение задачи. Оно состоит из начального условия T^0, потока тепла на поверхности Q, решения прямой $T(t)$ и сопряженной систем $T^*(t)$.

Отметим особенности постановки задачи в терминах системы оптимальности. Во-первых, расширяется понятие решения. Во-вторых, система оптимальности аппроксимирует не краевую задачу с начальными условиями, а краевую задачу по пространству и времени. Если $\varepsilon=0$, то для прямой системы условий по времени нет, а для сопряженной — ставится два условия: в начальный и конечный моменты. Если Q неизвестно, то вариационная постановка задачи позволяет (вместе с начальным полем) находить поток тепла на поверхности океана — важной характеристики взаимодействия атмосферы и океана.

С физической точки зрения задачу ассимиляции данных наблюдений можно описать следующим образом. Подбираются такие начальная температура и внешние источники, при которых модельное решение наиболее близко приближается к данным наблюдений T_{obs}. Если информация о начальном состоянии и источниках отсутствует, то первое и последнее слагаемые в функционале (3), вообще говоря, следует опустить. В общем случае такая нелинейная задача (температура нелинейно связана с соленостью, плотностью и полем течений) может не иметь решения. Тогда задачу нужно каким-то образом регуляризовать. Введение в (3) первого и последнего слагаемых, с одной стороны, позволяет это сделать, однако с другой стороны — увеличивает погрешность между модельным решением и данными наблюдений.

Алгоритм решения (4)–(6), (9)–(10) состоит из нескольких частей. Вначале в прямом времени решается (4) и вычисляется невязка $\left(T^j-T^j_{obs}\right)$. Затем в обратном времени решается сопряженная система (5). Затем вычисляются компоненты градиента функционала $grad\,J$ (10) и параметр μ, и находится решение на следующей итерации (9). Важная роль в сходимости итераций принадлежит алгоритму расчета μ. Иногда его можно оценить теоретически [Шутяев, 2001], в общем случае — рассчитать с помощью одного из стандартных методов, например метода Ньютона [Gilbert and Lemarechal, 1989].

Обращаясь к системе (5), видно, что использование метода расщепления позволяет строить сопряженный оператор не ко всему сложному оператору исходной задачи $A(T)$. Достаточно построить сопряженный оператор к части расщепленного оператора более простой структуры $A_i(T)$. В этом — алгоритмическая выгода комбинации методов расщепления и сопряженных уравнений. Система сопряженных уравнений (5) имеет аналогичную расщепленную структуру, порождаемую прямой системой (4). Если $A_i^* \geq 0$, то неявная схема (5) — безусловно устойчива, Сопряженную систему можно использовать автономно, например для апостериорного анализа решения.

Рассмотренная методология была использована в задаче вариационной ассимиляции трехмерных полей температуры и солености: климатических массивов и плавающих буев АРГО, в модели Мирового океана ИВМ РАН [Марчук и Залесный, 2012]. Расчеты показали гибкость вычислительной процедуры и эффективность синтеза данных наблюдений и модельных расчетов. В рамках единого эксперимента можно сочетать прогноз течений и термохалинных полей и ассимилировать разные типы данных.

В качестве примера приведем ассимиляцию данных буев Арго в модели Мирового океана [Марчук и Залесный, 2012]. Вначале с нерегулярной сетки измерений (в слое до 2000 м, с пропусками в Арктике и Южном океане) данные экстраполируются на расчетную область Мирового океана (рис. 2). Затем в двухэтапном режиме “вариационная ассимиляция — прогноз” рассчитываются глобальные поля течений, плотности, температуры и солености. На этапе прогноза решается полная нелинейная задача (примитивная модель) с приближенными начальными полями. На этапе ассимиляции решается задача вариационной инициализации для уравнений температуры, солености и плотности с полями течений, рассчитанными на этапе прогноза. Находятся “оптимальные” начальные поля температуры и солености

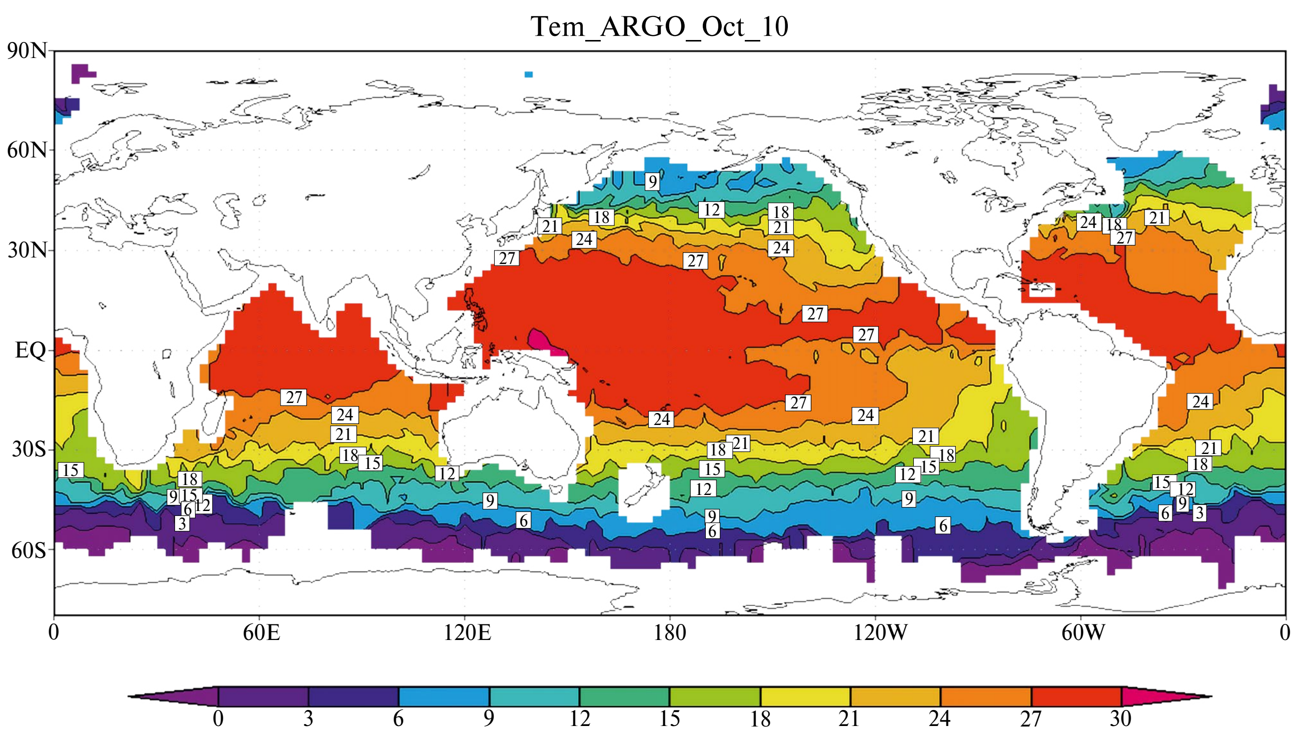

Рис. 2. Температура, данные наблюдений (АРГО), 10 м, октябрь 2008 г.

T_{opt}^0, S_{opt}^0. Эта процедура циклически повторяется до выхода решения на квазиравновесный режим (рис. 3, 4). В результате вычисляется трехмерное поле течений, согласованное с оптимальными полями температуры и солености (рис. 5).

6. РАЗВИТИЕ ИДЕЙ И МЕТОДОВ

Проблемы геофизической гидродинамики и математические методы. Фундаментальной в теории климата является проблема оценки чувствительности моделей к малым внешним воздействиям. Необходимо понять: какие ха-

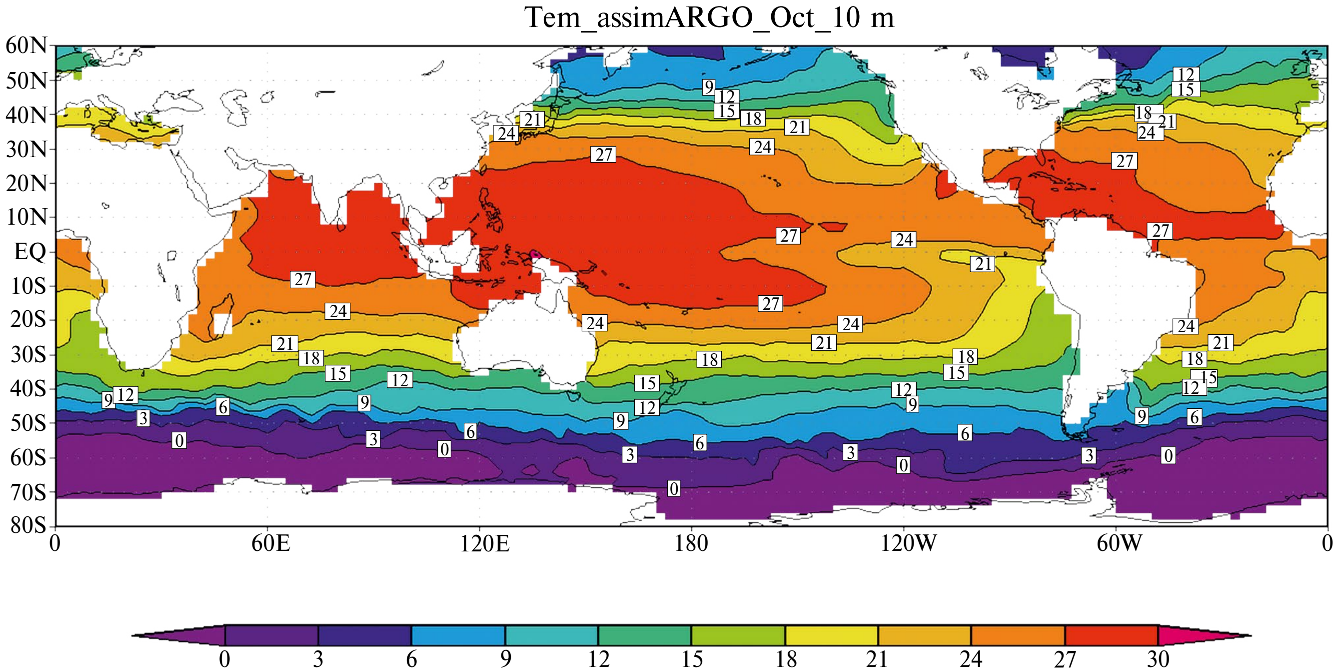

Рис. 3. Температура, ассимиляция буев АРГО, оптимальное решение, 10 м, октябрь 2008 г.

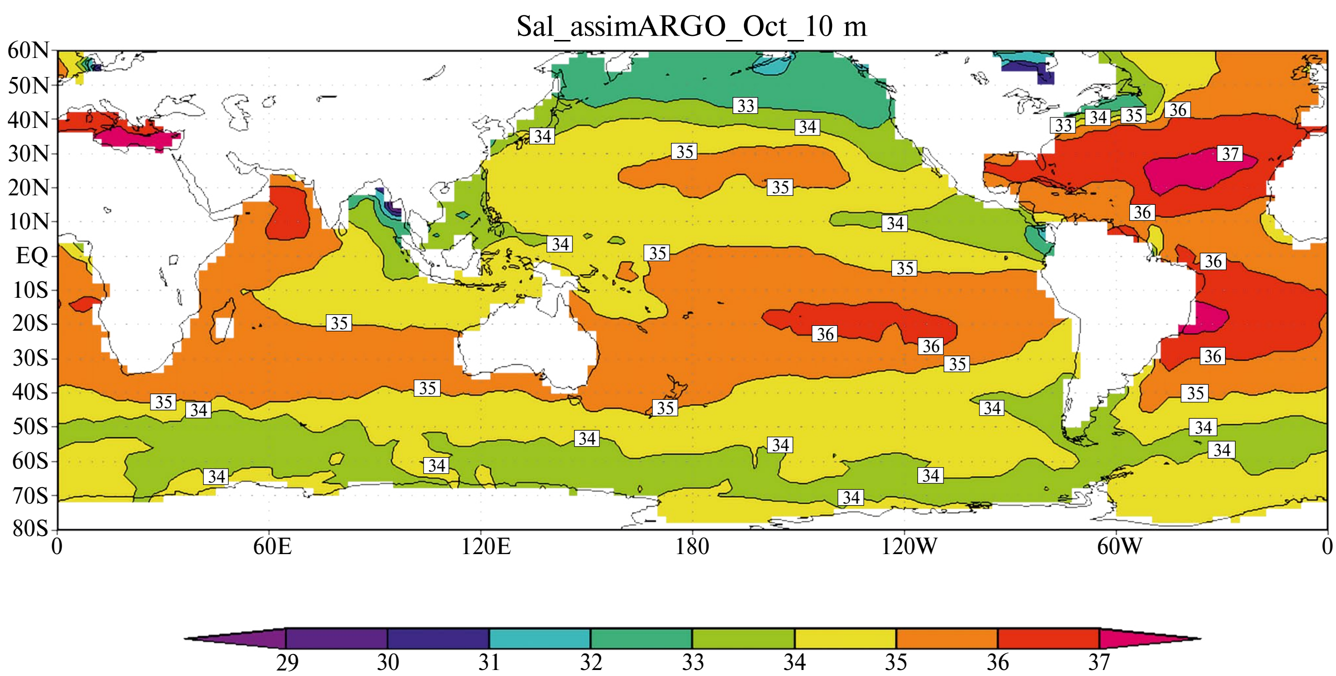

Рис. 4. Соленость, ассимиляция буев АРГО, оптимальное решение, 10 м, октябрь 2008 г.

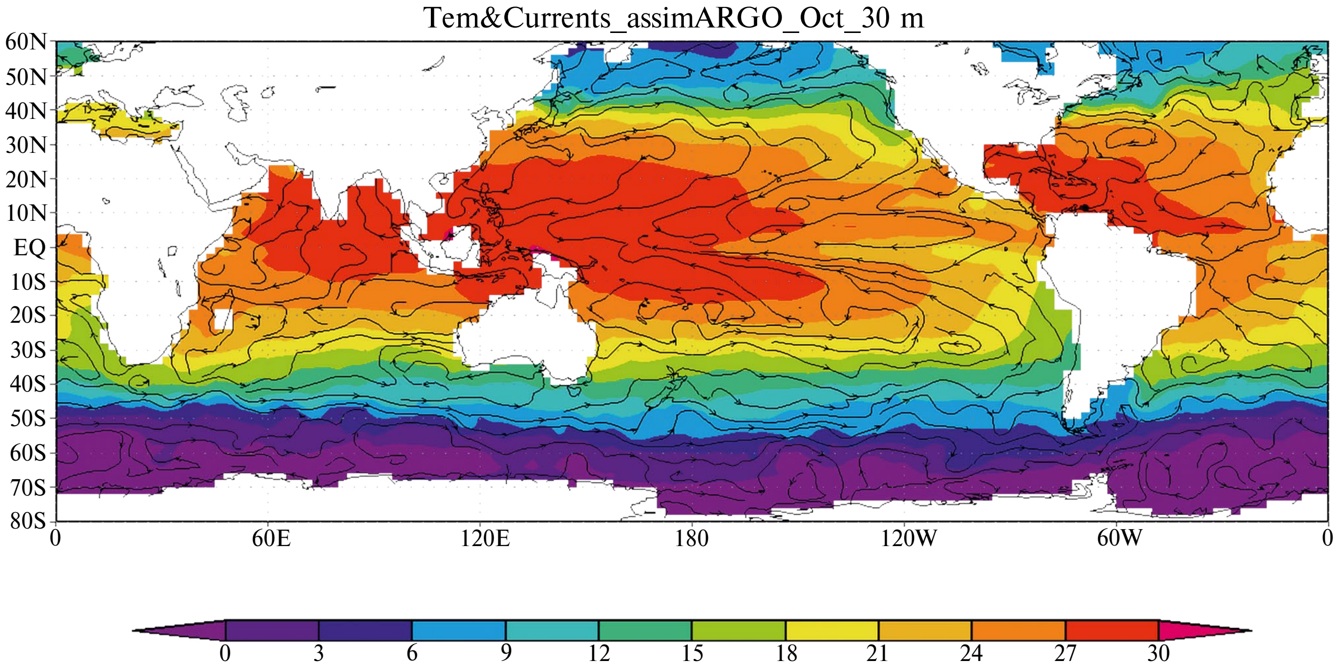

Рис. 5. Температура и течения, ассимиляция буев АРГО, оптимальное решение, 30 м, октябрь 2008 г.

рактеристики и с какой точностью должна воспроизводить модель, чтобы ее чувствительность была близка к чувствительности реальной климатической системы? Для решения этого вопроса можно использовать два подхода. Во-первых, это — развитый Г.И. Марчуком вариационный метод [Марчук, 2018b]. Метод может использоваться для оценки чувствительности моделей динамики океана [Shutyaev et al., 2023], его развитию посвящена одна из работ данного выпуска журнала “Физика атмосферы и океана” [Агошков и др., 2025]. Во-вторых, метод на основе теории диссипативных динамических систем, развитый В.П. Дымниковым с соавторами [Dymnikov and Filatov, 1997; Dymnikov and Gritsoun, 1997; Dymnikov and Gritsoun, 2001]. Он используется для построения операторов отклика климатической системы на малые внешние воздействия. Ключевым моментом метода является исследование структуры аттракторов климатических моделей и их устойчивости. На примере этих подходов хорошо видна связь математической теории, численных методов, задач климата и динамики океана.

Проблемы геофизической гидродинамики и глобальные наблюдательные программы. Важнейшим вопросом предсказуемости климатических систем является роль краевых условий в формировании предсказуемого сигнала. Наиболее конструктивными в этом смысле были два предложения, сделанные в середине 70-х и начале 80-х гг. XX столетия. Оба предложения касались роли океана в формировании короткопериодных колебаний климата (на внутрисезонных и межгодовых временных масштабах).

Первое предложение было выдвинуто Г.И. Марчуком [Марчук и др., 1984]. Как отмечено выше, его идея заключалась в том, что за короткопериодные колебания климата ответственны энергоактивные зоны океана. Изучение этой гипотезы было проведено в рамках научно-наблюдательной программы “Разрезы”.

Второе предложение было связано с исследованием роли тропиков Тихого океана в формировании межгодовых колебаний климата, более узко — связи Эль-Ниньо с колебаниями климата в средних широтах. Для изучения этого феномена была сформирована в 1985 г. международная программа ТОГА (тропический океан — глобальная атмосфера) [TOGA, 1990]. Она привела к разработке численных схем прогноза этого явления и созданию совместных моделей глобальной атмосферы и тропического океана. Отметим, что принципиальное значение в понимании этой проблемы сыграла работа [Hoskins and Karoly, 1981].

Еще раз подчеркнем, что развитие моделей геофизической гидродинамики стимулировалось бурным развитием вычислительной техники и измерительных систем. Исследования в этом направлении интенсивно развиваются и приводят к разработке новых информационно-вычислительных технологий [Марчук и др., 2013; Крупчатников и др., 2018; Платов и др., 2019; Коротаев и Мизюк, 2025]. В основе этих технологий лежат методы решения нескольких задач: непосредственно задачи прогноза погоды, инициализации, анализа информации и, наконец, задачи четырехмерного вариационного усвоения данных. Заметим, что вместе с вариационным развиваются также статистические подходы, основанные на решении ансамбля прогностических задач. В начальный момент времени при этом можно учитывать распределение ошибок начальных данных, а ансамбль экспериментов разыгрывать методом Монте-Карло [Михайлов и Войтишек, 2023]. Метод Монте-Карло идеально реализуется на параллельных вычислительных системах.

В заключение выделим несколько результатов в области геофизической гидродинамики, полученных учениками и коллегами Г.И. Марчука за 50 лет XX–XXI вв.

Теоремы и математические постановки задач. На протяжении всей научной деятельности Г.И. Марчук уделял особое внимание исследованию математических свойств дифференциальных моделей геофизической гидродинамики. Первые работы включали: теоремы существования и единственности решения задач прогноза погоды [Марчук, 2018c; Демидов и Марчук, 1966], разрешимости баротропных и бароклинных задач теории приливов [Марчук и Каган, 1983; Марчук и Бубнов, 1980; Бубнов, 1984]. Работы по разрешимости задач прогноза погоды и теории приливов стимулировали дальнейший цикл исследований математических свойств вначале классических уравнений динамики океана [Кордзадзе, 1977, 1982], а затем новых задач, связанных с чувствительностью функционалов и вариационной ассимиляцией данных наблюдений [Agoshkov, 2005].

Выделим два потока исследований. Первый — это доказательство глобальной разрешимости классического решения уравнений динамики океана в приближении гидростатики [Kobelkov, 2007]. Работа явилась существенным шагом в изучении глобальной разрешимости трехмерных уравнений Навье-Стокса. На ее основе были доказаны теоремы сходимости решений неявных численных аппроксимаций к решению исходной дифференциальной задачи [Друца и Кобельков, 2011]. Второй поток связан с развитием теоретических исследований в изучении обобщенных решений задач динамики океана, и затем новых задач о чувствительности функционалов и вариационной ассимиляции данных. Основные результаты здесь получены в работах научной школы Г.И. Марчука [Шутяев, 2001; Agoshkov et al., 2009; Agoshkov and Zalesny, 2012; Пармузин и др., 2020; Shutyaev et al., 2023; Агошков и др., 2025].

Методы и алгоритмы. Основным алгоритмическим достижением в создании эффективных моделей крупномасштабного взаимодействия атмосферы и океана является развитие метода многокомпонентного расщепления. Он хорошо проявил себя как методологическая основа построения иерархической модельной системы и как эффективный метод решения сложной задачи по времени.

Метод расщепления по физическим процессам успешно развивается вплоть до настоящего времени. Он использован при построении модели с k-omega параметризацией вертикального турбулентного обмена [Мошонкин и др., 2018] и модели негидростатической динамики [Залесный и др., 2016]. В первом случае в исходную модель включается подсистема двух уравнений k-omega параметризации. Она решается на дополнительном этапе расщепления либо численно, либо аналитически. Во втором случае в модель включается блок негидростатической динамики. Его уравнения решаются на дополнительном этапе расщепления.

Задачи четырехмерной вариационной ассимиляции. Особое место в развитии методов теории сопряженных уравнений занимают работы Г.И. Марчука и его учеников в области динамики атмосферы и океана, теории климата. Создано новое направление исследований, связанное с решением широкого класса задач по оценке чувствительности климатических моделей и четырехмерной ассимиляции данных наблюдений в современных моделях гидродинамики океана. Оригинальное развитие метода представлено в [Агошков и др., 2025].

Модели и вычислительные системы. Кратко перечислим оригинальные модели и вычислительно-информационные системы, развитые в рамках научной школы Г.И. Марчука.

— Глобальная модель климатической системы Земли. Первая версия модели глобального взаимодействия атмосферы и океана [Марчук и др., 1975]. Современная версия климатической модели Земли [Володин и др., 2025].

— Глобальная модель общей циркуляции океана на основе метода расщепления по физическим процессам — первая версия модели [Марчук и др., 1975; Марчук и др., 1984]. Современные версии моделей Мирового океана, отдельных океанов и морей [Залесный и др., 2016; Мошонкин и др., 2018; Гусев и др., 2025].

— Модели динамики морей и океанов с четырехмерной вариационной ассимиляцией данных на основе комбинации методов расщепления и сопряженных уравнений [Agoshkov et al., 2009; Марчук и Залесный, 2012; Agoshkov and Zalesny, 2012; Пармузин и др., 2020; Shutyaev et al., 2023; Агошков и др., 2025].

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 20-11-20057.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Агошков В.И., Залесный В.Б., Шутяев В.П., Пармузин Е.И., Захарова Н.Б. Сопряженные уравнения и методы вариационного усвоения данных в задачах геофизической гидродинамики // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2025. Т. 61. № 3.

Бубнов М.А. Математические вопросы моделирования приливов и циркуляций в бароклинном океане. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984. 152 с.

Булеев Н.И., Марчук Г.И. О динамике крупномасштабных атмосферных процессов // Труды Ин-та физики атмосферы АН СССР. 1958. № 2. С. 66–105.

Володин Е.М., Грицун А.С., Брагин В.В., Тарасевич М.А., Черненков А.Ю. Развитие модели Земной климатической системы ИВМ РАН // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2025. Т. 61. № 3.

Гусев А.В., Дианский Н.А., Фомин В.В., Володин Е.М., Залесный В.Б. Модель циркуляции океанов и морей INMOM: от истоков до наших дней // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2025. Т. 61. № 3.

Демидов Г.В., Марчук Г.И. Теорема существования решения задачи краткосрочного прогноза погоды // ДАН СССР. 1966. Т. 170. № 5. С. 1006–1008.

Друца А.В., Кобельков Г.М. О сходимости разностных схем для уравнений крупномасштабной динамики океана // Доклады РАН. 2011. Т. 440. № 6. С. 727–730.

Дымников В.П., Залесный В.Б. Основы вычислительной геофизической гидродинамики. М.: ГЕОС, 2019. 448 с.

Залесный В.Б., Гусев А.В., Фомин В.В. Численная модель негидростатической морской динамики, основанная на методах искусственной сжимаемости и многокомпонентного расщепления // Океанология. 2016. Т. 56. № 6. С. 951–971.

Кордзадзе А.А. О разрешимости одной стационарной задачи динамики бароклинного океана // ДАН СССР. 1977. Т. 232. № 2. С. 308–311.

Кордзадзе А.А. Математические вопросы решения задач динамики океана. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982. 148 с.

Коротаев Г.К., Мизюк А.И. Развитие систем прогноза морских полей и алгоритмов ассимиляции наблюдений // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2025. Т. 61. № 3.

Крупчатников В.Н., Платов Г.А., Голубева Е.Н., Фоменко А.А., Клевцова Ю.Ю., Лыкосов В.Н. О некоторых результатах исследований в области численного прогноза погоды и теории климата в Сибири // Метеорология и гидрология. 2018. № 11. С. 7–19.

Марчук Г.И. Теоретическая модель прогноза погоды // ДАН СССР. 1964. Т. 155. № 5. С. 1062–1065.

Марчук Г.И. Численные методы в прогнозе погоды. Л.: Гидрометеоиздат, 1967. 356 с.

Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.

Марчук Г.И. Избранные труды. Т. I. Методы вычислительной математики. М.: РАН, 2018. 764 с.

Марчук Г.И. Избранные научные труды. Т. II. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. М.: РАН, 2018. 500 с.

Марчук Г.И. Избранные научные труды. Том III. Модели и методы в задачах физики атмосферы и океана. М.: РАН, 2018. 892 с.

Марчук Г.И., Бубнов М.А. Об асимптотическом поведении решения линейных уравнений бароклинного океана при больших временах // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1980. Т. 16. № 3. С. 211–218.

Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б., Галин В.Я., Лыкосов В.Н., Перов В.Л., Бобылева И.М. Гидродинамическая модель общей циркуляции атмосферы и океана (методы реализации). Информационное сообщение. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1975. 320 с.

Марчук Г.И., Дымников В.П., Курбаткин Г.П., Саркисян А.С. Программа “Разрезы” и мониторинг Мирового океана // Метеорология и гидрология. 1984. № 8. С. 9–17.

Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б., Лыкосов В.Н., Галин В.Я. Математическое моделирование общей циркуляции атмосферы и океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1984. 320 с.

Марчук Г.И., Залесный В.Б. Моделирование циркуляции Мирового океана с четырехмерной вариационной ассимиляцией полей температуры и солености // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2012. Т. 48. № 1. С. 21–36.

Марчук Г.И., Каган Б.А. Динамика океанских приливов. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. 360 с.

Марчук Г.И., Патон Б.Е., Коротаев Г.К., Залесный В.Б. Информационно-вычислительные технологии — новый этап развития оперативной океанографии // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2013. Т. 49. № 6. С. 629–642.

Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. — М.: Юрайт, 2023. 323 с.

Мошонкин С.Н., Залесный В.Б., Гусев А.В. Алгоритм решения к-омега уравнений турбулентности в модели общей циркуляции океана // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2018. Т. 54. № 5. С. 584–598.

Пармузин Е.И., Залесный В.Б., Агошков В.И., Шутяев В.П. Методы вариационного усвоения данных в моделях геофизической гидродинамики и их применение // Изв. вузов. Радиофизика. 2020. Т. 63. № 9. С. 749–770.

Платов Г.А., Рапута В.Ф., Крупчатников В.Н., Голубева Е.Н., Малахова В.В., Леженин А.А., Боровко И.В., Крылова А.И., Якшина Д.Ф., Крайнева М.В., Кравченко В.В., Коробов О.А. Создание и развитие многокомпонентного комплекса моделей гидродинамических процессов Земли // Проблемы информатики. 2019. Т. 43. № 2. С. 4–35.

Шутяев В.П. Операторы управления и итерационные алгоритмы в задачах усвоения данных. М.: Наука, 2001. 239 с.

*Agoshkov V.I. I*nverse problems of the mathematical theory of tides: boundary-function problem // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2005. V. 20. № 1. P. 1–18.

Agoshkov V.I., Lebedev S.A., and Parmuzin E.I. Numerical solution to the problem of variational assimilation of operational observational data on the ocean surface temperature // Izvestiya, Atmos. Ocean. Phys. 2009. V. 45. № 1. P. 69–101.

Agoshkov V.I., Zalesny V.B. Variational data assimilation technique in mathematical modeling of ocean dynamics // Pure and Applied Geophys. 2012. V. 169. № 3. P. 555–578.

Dymnikov V., Gritsoun A. On the structure of the attractors of finite-dimensional approximations of the barotropic vorticity equation on rotating sphere // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1997. V. 12. № 1. P. 13–32.

Dymnikov V., Gritsoun A. Climate model attractors: chaos, quasi-regularity and sensitivity to small perturbations of external forcing // Nonlinear processes in geophysics. 2001. V. 8. P. 201–209.

Dymnikov V., Filatov A. Mathematics of climate modeling. Birkhäuser: Boston, 1997. 260 p.

Gilbert J.-C., Lemarechal C. Some numerical experiment with variable storage quasi-Newton algorithms. Math. Program. 1989. B25. P. 408–435.

Hoskins B.J., Karoly D.J. The steady linear response of a spherical atmosphere to thermal and orographic forcing // J. Atmos. Sci. 1981. V. 38. №. 6. P. 1179–1196.

Kobelkov G.M. Existence of a Solution “in the Large” for Ocean Dynamics Equations // J. math. fluid mech. 2007. V. 9. P. 588–610.

Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. P. 130–141.

Manabe S. and Bryan K. Climate calculation with a combined ocean-atmosphericm odel // J. Atmos. Sci. 1969. V. 26. № 4. P. 786–789.

Marchuk G.I., Schröter J., Zalesny V.B. Numerical study of the global ocean equilibrium circulation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2003. V. 18. N. 4. P. 307–335.

Sarkisyan A.S., Suendermann J.E. Modelling ocean climate variability. New York, Heidelberg: Springer Science+Business Media B.V. 2009. 374 p.

Scientific plan for the TOGA Coupled Ocean-Atmosphere Response Experiment: Advance copy for the participants of Inter-governmental TOGA Board, Third Session, Geneva, 9–12 January 1990. Geneva, World Meteorological Organization (WMO), World Climate Research Programme (WCRP), Tropical Ocean and Global Atmosphere Programme (TOGA), 1990.

Shutyaev V., Zalesny V., Agoshkov, V., Parmuzin E., and Zakharova N. Data Assimilation and Sensitivity of Ocean Model State Variables to Observation Errors // Journal of Marine Science and Engineering. 2023. V. 11. P. 1253.

MODELING OF CLIMATE, ATMOSPHERIC AND OCEAN DYNAMICS: TO THE 100TH ANNIVERSARY OF ACADEMICIAN G.I. MARCHUK

V. P. Dymnikov*, V. B. Zalesny**

Marchuk Institute of Numerical Mathematics, Russian Academy of Sciences, Gubkina str., 8, Moscow, 119333 Russia

**e-mail: dymnikov.valentin@yandex.ru*
***e-mail: vzalesny@yandex.ru*

Introductory paper on the issue of the journal *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics,* No. 3, 2025, dedicated to the 100th anniversary of Academician G.I. Marchuk. The main directions of scientific activity of G.I. Marchuk, which had a significant impact on the development of modern geophysical fluid dynamics, are described. These are weather forecasting; modeling of the climate system; application of the theory of adjoint equations to geophysical fluid dynamics problems; computational algorithms. The ideas and mathematical methods of modern geophysical fluid dynamics initiated by G.I. Marchuk and developed by his scientific school over the course of 25 years of the XX and 25 years of the XXI century are discussed. The bright deep mark that he left in science is noted, and the results obtained by him, his disciples and colleagues in the field of geophysical fluid dynamics are highlighted.

Keywords: geophysical fluid dynamics, atmospheric and ocean physics, mathematical modeling, numerical algorithms, adjoint equations