ИЗВЕСТИЯ РАН. ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА, 2025, том 61, № 4, с. 423–429

УДК 532.5.01

ЛАГРАНЖЕВЫ (ФАЗОВЫЕ) СТРУКТУРЫ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

© 2025 г. И. Г. Якушкин

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Пыжевский пер., 3, стр. 1, Москва, 119017 Россия

e-mail: lgg@ifaran.ru, iyakushkin@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.07.2024 г.
После доработки 17.10.2024 г.
Принята к публикации 15.11.2024 г.

В работе рассмотрен геометрический подход к описанию структур в баротропных течениях несжимаемой жидкости. Такой способ описания имеет аналогию в геометрической оптике. Рассматривается эволюция равновесных течений, при которой происходит изменение траекторий лагранжевых инвариантов, выраженных через завихренность течения. Связь между завихренностью и скоростью устанавливается через асимптотику решения уравнения Пуассона. Обсуждаются пределы применимости предложенного подхода, а также возможность его обобщения для бароклинных течений.

Ключевые слова: структуры, лагранжевы инварианты, завихренность

DOI: 10.7868/S3034648725040018

1. ВВЕДЕНИЕ

Структурное описание геофизических полей всегда привлекало и продолжает привлекать большое внимание. Их изучению посвящены многие теоретические и экспериментальные работы [Blackwelder, 1987; Groesen, 1996; Должанский, 2011; Рабинович и др., 1998; Vallis, 2017]. В работах [Кляцкин, 2014; Якушкин, 2023; Yakushkin, 2023] было отмечено сходство структур в геофизических полях различной природы, включая оптику и гидродинамику, но связь эта не была раскрыта с достаточной полнотой. Возвращаясь к этому вопросу, остановимся, в первую очередь, на описании структур в течениях при больших числах Рейнольдса, когда справедливы уравнения идеальной жидкости. Предположение о сходстве этих уравнений с уравнениями оптики представляется естественным, так как и в том и в другом случае в основе описания лежат уравнения Гамильтона [Гончаров, 2008].

Более простыми для анализа являются структуры в баротропных течениях. Такие структуры интересны в связи с развитием интенсивных вихрей и турбулентности в нижних слоях атмосферы [Jimenez, 2018; Агафонцев и др., 2022]. Интенсивные вихревые структуры, для которых поле скорости удовлетворяет неравенству $gH \ll V^2 \ll C^2$ (где H — толщина слоя, V — скорость течения, C — скорость звука) могут быть описаны как течения баротропной несжимаемой жидкости. Кроме того, их теоретическое изучение необходимо для интерпретации многочисленных лабораторных экспериментов, в том числе тех, которые велись и ведутся в ИФА им. А.М. Обухова [Должанский и др., 1990]. Такие структуры генерируются в замкнутых сосудах с помощью сторонней силы и создают многочисленные регулярные и стохастические режимы. Для полного их описания необходимо обращение к уравнениям вязкой жидкости, однако и анализ идеальных вихревых течений дает много информации. Настоящая работа посвящена обоснованию подхода к описанию течений баротропной несжимаемой жидкости, основанного на приближении близком геометрической оптике. В разделе 2 развивается общий подход к решению трехмерных задач. В разделе 3 более подробно рассматриваются двумерные течения. В заключении обсуждается возможность подобного описания бароклинных течений.

2. ЛАГРАНЖЕВЫ СТРУКТУРЫ В БАРОТРОПНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

При описании структур в течениях идеальной жидкости удобно использовать понятие лагранжева инварианта [Якушкин, 2005]. Эти величины выражаются через начальные значения координаты точки на траектории точек и сохраняют на ней свое значение. Из этих инвариантов один определяет поверхность, на которой лежит траектория, второй положение траектории на этой поверхности, а третий положение точки на траектории. Таким образом, течение включает движение по лагранжевой траектории и движение самих траекторий. Эти величины связаны с переменными Клебша, которые используются в уравнениях Гамильтона. Они создают систему координат, в которой могут быть записаны эти уравнения. Для поля скорости $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$, через инварианты h_i имеем [Якушкин, 2005]

$$V = u_i S_i, (i = 1-3)$$
$$S_i = \nabla h_i. \tag{1}$$

Коэффициенты u_i в баротропном случае также являются лагранжевыми инвариантами. Поле завихренности записывается как

$$\Omega = \left[\nabla u_i \times \boldsymbol{S}_i\right]. \tag{2}$$

Лагранжевым инвариантом является величина [Якушкин, 2005]:

$$N = \left(\Omega \nabla h_i\right). \tag{3}$$

Образование структур происходит около точки полного или частичного равновесия течений. В баротропной жидкости положение точек равновесия зависит от соотношения между полем скорости и полями его завихренности. Для таких течений точка равновесия определяется условием:

$$rot\left[\boldsymbol{V} \times rot\boldsymbol{V}\right] = 0 \tag{4}$$

Оно обобщает более простое условие $\boldsymbol{V} = 0$. Для простейших структур оно принимает вид:

$$\left[\boldsymbol{V} \times rot\boldsymbol{V}\right] = \nabla U, \tag{5}$$

где U — произвольная функция.

Равновесными являются и составные структуры, для которых выполняется дополнительное условие:

$$\boldsymbol{V}_1 = rot\boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_2 = rot\boldsymbol{V}_1. \tag{6}$$

На языке лагранжевых инвариантов, образующих ортогональную систему координат, такие течения могут быть представлен как:

1. Течение типа струи

$$\boldsymbol{V} = v\left(h_1 h_2\right)\nabla h_3, \Omega = \left[\nabla v \times \nabla h_3\right].$$

2. Течение типа вихря

$$\boldsymbol{V} = v_1\left(h_1\right)\nabla h_2 + v_2\left(h_2\right)\nabla h_1, \Omega = F\left(h_1 h_2\right)\nabla h_3.$$

Кроме простых структур могут существовать и их комбинации в виде спирального вихря с согласованными значениями скорости и завихренности. Отклонения от условия равновесия вызывают появление квазиравновесных структур. Уравнение траекторий на Лагранжевом языке имеет вид:

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \boldsymbol{V}\left(h_i\right).$$

Тензор dR_i / dh_j указывает локальные свойства вихревой трубки на лагражевой траектории, в том числе ее толщину. Тем самым локальная форма вихревого поля зависит от лагранжевых инвариантов, но их система теряет ортогональность, а компоненты поля скорости приобретают дивергенцию. Это требует введения дополнительной компоненты в поле скорости в виде:

$$\boldsymbol{V} = u_i \boldsymbol{S}_i = \lambda_1 \nabla h_1 + \lambda_2 \nabla h_2 + \nabla\theta, u_i = \lambda_i + \frac{\partial\theta}{\partial h_i}.$$

Связь поля завихренности с полем скорости задается уравнением Пуассона для скалярного или векторного потенциала. Тем самым задача имеет сходство с задачей электростатики, где завихренность играет роль источников поля. Решение этого уравнения выражается в интегральной форме с помощью функции Грина или с помощью разложения Фурье. Эти решения сводят задачу описания эволюции поля скорости к системе нелинейных уравнений с большим числом переменных. Вместе с тем возможны решения задачи, имеющие простую форму, основанную на разложении по малому параметру, каким является отношение двух разных масштабов. Так мы получаем траектории лагранжевых инвариантов, формирующих структуру течения. Простейшими являются структуры, локализованные в области с постоянной завихренностью, граница которых представляет собой лагранжев инвариант. Вне завихренной области поле потенциала удовлетворяет уравнению Лапласа с условиями на границе. Такие и сходные с ними структуры рассмотрены в работах Ф. В. Должанского [Должанский и др., 2002], Н. Н. Романовой [Romanova and Annenkov, 2005] и других исследователей. Этот подход использует частные решения уравнения Пуассона.

В более общем случае имеем уравнение для векторного потенциала $\boldsymbol{A}$:

$$\Delta \boldsymbol{A} = \Omega.$$

Используя (3), представим завихренность баротропного течения 1 в виде:

$$\Omega = \Omega(kS) = \frac{\nabla h F(kS)}{(\nabla h)^2}, \quad (7)$$

где $F(kS)$, а также h — лагранжевы инварианты. Решение уравнения ищем в виде:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q} H(kS).$$

При $k \gg 1$ мы задаем функцию H из условия $H_{ss} = F$, а выражение для $\boldsymbol{Q}$ получаем в виде разложения по малому параметру. Зависимость $F(S)$ может задаваться в различном виде, в том числе как фазовая структура вида:

$$F = \cos kS(r).$$

При $k \gg 1$ для вектора $\boldsymbol{Q}$ получаем уравнение:

$$\boldsymbol{Q}(\nabla S)^2 H_{ss} + 2[rot\boldsymbol{Q} \times \nabla S] + \Delta S H_s \boldsymbol{Q} = \Omega_0 F, \quad (8)$$

$$H_{ss} = F(kS).$$

Сохраняя главный член разложения, имеем

$$\boldsymbol{Q}(\nabla S)^2 = \Omega_0,$$

с учетом этого сомножителя мы находим простую связь между полями скорости и завихренности:

$$\boldsymbol{V} = H_s[\nabla S \times \boldsymbol{Q}].$$

Равновесие достигается при $(\nabla S \Delta \boldsymbol{V}) = 0$. Отклонение от равновесия создает аналогичную оптике картину фокусировок, при которой происходит сближение лагранжевых траекторий и их растяжение в направлении течения. Таким образом, могут быть описаны трехмерные фазовые структуры в форме струи или вихря. Переходя отсюда к уравнениям для завихренности, мы должны учесть эволюцию формы не только основного, но и дополнительного инварианта, который задан формулой (7). Это усложняет описание, хотя и не выводит его за рамки геометрических представлений. Таким образом могут быть описаны не только парциальные, но и комбинированные структуры в виде спиральных вихрей, для которых завихренность задается как сумма инвариантов $\Omega = H(S)(\nabla h_1 + \nabla h_2)$.

Подобные структуры регистрируются в численных моделях, связанных с интерпретацией лабораторных экспериментов. Они образуются около твердых или подвижных границ течения жидкости.

В целом сформулированный подход, как и в оптике, основан на асимптотике решений уравнений движения. Он дает картину эволюции траекторий на определенном этапе. При сильном сближении лагранжевых траекторий необходимо учитывать как диссипативные эффекты, так и более точную связь между полями скорости и завихренности. Более полная картина поведения траекторий при нарушении равновесия включает колебания между неустойчивыми стационарными состояниями. Для более полного описания могут быть использованы другие приближенные решения уравнения Пуассона, учитывающие взаимодействие структур и их волновые свойства. В оптике это достигается на основе уравнения Леонтовича.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДВУМЕРНЫХ СТРУКТУР

Рассмотрим подробнее двумерное течение. В этом случае завихренность является лагранжевым инвариантом, определяющим положение системы траекторий. Уравнение Пуассона для функции тока имеет вид:

$$\Delta \psi = \Omega(kS).$$

Пространственное распределение лагранжевого инварианта, каким является завихренность, может быть задано в разных видах, например, как слоистая или фазовая структура. Простейшая фазовая структура имеет вид:

$$\Omega = \Omega_0 \cos kS.$$

Если область завихренности ограничена, то выражение для функции тока дополняется решением однородного уравнения. Полное распределение завихреннности представляет собой сумму структур, расположенных как в физическом, так и в фазовом пространстве. Структуры взаимодействуют между собой, образуя различные ансамбли.

Пусть $\psi = QH(kS), H_{ss}(kS) = \Omega(kS)$, тогда

$$\nabla\psi = Q\nabla H + H\nabla Q, \tag{9}$$

т.е. поле скорости представляется в виде суммы компонент, описывающих движение по линиям Лагранжа и движение этих линий. При $k \gg 1$ функция Q удовлетворяет уравнению (8). Для главного члена разложения имеем:

$$Q = P, P = (\nabla S)^{-2}.$$

Отсюда получаем для скорости течения:

$$\nabla\psi = P\nabla H + H\nabla P. \tag{10}$$

Если для равновесного течения $\psi = \psi(X, Y)$, то при наличии возмущения:

$$\Omega_t = \psi_y \Omega_x - \psi_x \Omega_y, \tag{11}$$

$$S_t = H\left(P_y S_x - P_x S_y\right).$$

Уравнение для S соответствует уравнению для фазы в геометрической оптике [Кравцов и др., 1980] и дает основу для исследования траекторий отдельных точек и их окрестностей. Полагая, что P мало отклоняется от равновесного значения $P(Y)$, получаем линейную или нелинейную систему для описания малых возмущений. Более сильные отклонения требуют другого подхода, связанного с анализом функции $P(Y, X)$. Величина P характеризует толщину вихревой линии. В равновесном случае она постоянна на линии, а при наличии возмущении меняется вдоль нее. При этом она представляет собой квазиинвариант, который задает систему линий, пересекающую систему $S(r) = C$ и определяет характер движения. Особую роль играют точки локального равновесия, где $(\nabla S \Delta \nabla P) = 0$. Линии S, P образуют координатную сетку, наложенную на обычные координаты. Обе системы совпадают в случае равновесия и точка одной системы движется по другой. Движение точки по линии $S = C$ описывается уравнениями для переменных X, Y, которые соответствуют уравнениям геометрической оптики.

$$Y_t = -H(s)P_x, X_t = H(s)P_y. \tag{12}$$

Из выражения $P^{-1} = S_y^2 + S_x^2$ имеем:

$$P_x = -2\frac{\left(S_x S_{xx} + S_y S_{xy}\right)^2}{P^2}, P_y = -2\left(S_x S_{xy} + S_y S_{yy}\right)P^2.$$

Уравнения (12) описывают траектории (R_0, t), на которых $S = const$. Величина P характеризует толщину вихревой линии. В равновесном состоянии она постоянна на этой линии, а при наличии возмущении меняется вдоль нее. При этом она представляет собой лагранжев инвариант, который задает систему линий, пересекающую систему $S(r) = C$. Линии S, P образуют координатную сетку, наложенную на обычные координаты. Обе системы совпадают в случае равновесия и точка одной системы движется по другой. Особую роль играют точки локального равновесия, где $(\nabla S \Delta \nabla P) = 0$. В остальных точках происходит движение, направленное на совмещение этих векторов.

Рассмотрим структуру решения в окрестности некоторой точки S_0:

$$S = S_0 + S_1 X + S_2 Y + S_{11} X^2 + S_{22} Y^2 + 2S_{12} XY.$$

Функция P имеет аналогичную структуру:

$$\frac{1}{P} = P_0 + P_1 X + P_2 Y + P_{11} X^2 + P_{22} Y^2 + 2P_{12} XY,$$

$$\left(\frac{1}{P}\right)_x = P_1 + 2P_{11} X + 2P_{12} Y,$$

$$\left(\frac{1}{P}\right)_y = P_2 + 2P_{12} X + 2P_2 Y.$$

Подставляя это выражение в уравнение (12), получаем решение вида:

$$X(t) = X_0 + X_1 e^{\lambda_1 t} + X_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{13}$$

$$Y(t) = Y_0 + Y_1 e^{\lambda_1 t} + Y_2 e^{\lambda_2 t},$$

где коэффициенты зависят от начальных значений S, P.

Решение уравнения (12) имеет вид эллипса или гиперболы, по которым движется текущая точка. С каждой точкой связаны два вектора, которые стремятся совместиться между собой.

Представляя $P = P(S, X)$, имеем уравнение:

$$S_t = -HP_x(S, X)S_y.$$

Уравнение для $Y(S,X,t)$ принимает вид:

$$Y_t = -H(S)P_x(S,X)S_y. \quad (14)$$

Это уравнение дает «геометрическое» описание траекторий точки в других координатах. Движение траектории $Y(S,X,t)$ происходит в двух направлениях. С одной стороны, траектория искривляется, с другой — меняет свое положение относительно соседней траектории. Сгущение пучка траекторий сопровождается увеличением длины каждой из них.

Для решения уравнения в рамках геометрической теории следует представить функцию P_x как зависящую только от координат и первых производных. Уравнение (14) может решаться в различных приближениях с использованием и начальных условий. Предполагая $Y_x^2 \ll 1$, получаем уравнение:

$$S_t = -H(S)Y_{sx}. \quad (15)$$

Для начального условия $Y = Sq(x)$ имеем $Y_{sx} = q_x$.

Решение (15) дает «геометрическое» описание траекторий на плоскости (S_t, X). Оно описывает сгущение траекторий около линии постоянной завихренности. Степень сгущения зависит от точки X. Общая картина движения остается сходной с описанной ранее. Точка $q_x = 0$ остается центром структуры, состоящей из фронтов или областей сжатия–растяжения в направлении Y. Более полное описание структур поля завихренности требует учета движения по оси X. Когда вблизи линий нового равновесия образуются узкие фронты могут возникать более сложные колебательные структуры, а также может происходить переход к турбулентности.

Для более полного описания возникающих там эффектов необходим выход за пределы геометрического приближения и учет высших производных в уравнениях. Ширина фронта может ограничиваться диссипацией подобно тому, как это происходит при образовании ударных волн в акустике [Гурбатов и др., 1983]. Другим ограничителем ширины фронта являются вторичные волновые структур. В слоях между близкими траекториями вихревые линии начинают пульсировать, изменяясь по толщине. Эти процессы могут быть частично описаны при учете дополнительного члена в представлении решения уравнения Пуассона.

Вместе с тем при решении уравнения Пуассона наряду с простыми могут описываться и комбинированные структуры, представляющие собой сумму двух или более полей завихренности. Такие структуры могут быть двух типов. С одной стороны, так может быть представлена деформированная простая структура. Так, области с большими градиентами могут быть выделены, как отдельные компоненты полного поля завихренности. Каждая из структур удовлетворяет уравнению Пуассона и создает свое поле скорости, что в результате взаимодействия парциальных структур, приводит к образованию триплета. Другие комбинации являются суммой независимых полей завихренности, наложенных друг на друга в пространстве, с точками пересечения вихревых линий. К такому типу относятся вихревые решетки, используемые в лабораторных экспериментах. Эволюция таких течений чаще всего рассматривается и как результат взаимодействия структур. Этот подход следует из выражения:

$$\Omega = A\cos X\cos Y = \frac{A}{2}\left(\cos(X+Y) + \cos(X-Y)\right). \quad (16)$$

Две компоненты завихренности определяют две компоненты скорости. Базовая равновесная структура течения имеет вид:

$$V_1\nabla\Omega_2 + V_2\nabla\Omega_1 = 0.$$

При нарушении согласования возникают колебания, когда одна структура собирается в центре, а вторая располагается по ее сторонам. Такая картина хорошо видна на лабораторном эксперименте. Особый характер носит течение вблизи границы структуры. Для его описания необходимо использовать компоненту скорости, удовлетворяющую уравнению Лапласа, которое записывается в геометрическом приближении как

$$(\nabla H)^2 + (\nabla S)^2 H = 0.$$

Вблизи твердой границы при больших числах Рейнольдса возникает узкий пограничный слой, где нормальная скорость мала, но происходит ее генерация. Образующуюся вихревую структуру показывает численный анализ теоретической модели, интерпретирующей лабораторный эксперимент [Kostrykin et al., 2014].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Остановимся кратко на описании структур в бароклинных течениях несжимаемой жидкости. Два лагранжева инварианта — плотность и потенциальная завихренность определяют два типа равновесного течения в вертикальной и горизонтальной плоскостях. При малых возмущениях в каждой системе возникают быстрые и медленные колебания. Медленная компонента выделяется точкой геострофического или подобного ему равновесия, а быстрая определяется равновесием между скоростью и завихренностью, как и в баротропных течениях. Такие колебания на фоне постоянного поля могут быть описаны на языке пространственно-временного преобразования Фурье.

Вместе с тем начальное возмущение представляет собой лагранжеву структуру траектории, которая может быть описаны на геометрическом языке. При наличии двух типов возмущений образуется парная структура из мелкомасштабной и крупномасштабной компонент, которые при взаимодействии порождают еще одну. Подобные триплеты возникают и при колебаниях одного типа.

При наличии структур разного масштаба общая картина траекторий точки оказывается сложной и носит скорее стохастический характер. Однако на отдельных пространственно-временных участках отдельные структуры оказываются выраженными достаточно определенно. Геометрический подход к описанию течений несжимаемой жидкости представляет собой некоторую альтернативу подходу, основанному на преобразовании Фурье. Этот подход позволяет проследить за движением отдельной точки, включая деформацию ее окрестности. Для более полного описания эволюции течений полезно совмещение двух подходов. Крупномасштабные структуры при этом формируются на фоне мелкомасштабного хаоса, который описывается на языке спектра [Якушкин, 2023; Kostrykin et al., 2014].

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает глубокую благодарность А.А. Хапаеву за помощь в редактировании и оформлении работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Агафонцев Д.С., Кузнецов Е.А., Майлыбаев А.А., Серещенко Е.В. Сжимаемые вихревые структуры и их роль в образовании турбулентности // УФН. 2022. Т. 192. С. 205–225.

Гончаров В.П., Павлов В.И. Гамильтоновая вихревая и волновая динамика. М.: ГЕОС, 2008. 432 с.

Гурбатов С.Н., Саичев А.И., Якушкин И.Г. Нелинейные волны и одномерная турбулентность в средах без дисперсии // УФН. 1983. Т. 141. № 2. С. 221–253.

Должанский Ф.В., Крымов В.А., Манин Д.Ю. Устойчивость и вихревые структуры в квазидвумерных сдвиговых течениях // УФН. 1990. Т. 160. № 7. С. 1–45.

Должанский Ф.В., Пономарев В.М. Простейшие медленные многообразия баротропных и бароклинных движений вращающейся жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2002. Т. 38. № 3. С. 316–330.

Должанский Ф.В. Основы геофизической гидродинамики. М.: Физматлит, 2011. 264 с.

Кляцкин В.И. Статистический анализ когерентных явлений в стохастических динамических системах. М.: URSS, 2014. 768 с.

Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 306 с.

Рабинович М.И., Езерский А.Б. Динамическая теория формообразования. М.: Янус-К, 1998. 191 с.

Якушкин И.Г. О лагранжевом и гамильтоновом описании моделей геофизических течений идеальной жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2005.Т. 41. № 2. С. 156–166.

Якушкин И.Г. Структурное описание геофизических случайных полей с негауссовской статистикой // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2023. Т. 59. № 2. С. 173–191.

Blackwelder R.F.M. Coherent structures associated with turbulent transport // Proc. 2nd Int. Sump. Tokyo, 1987. P. 1–20.

Groesen Van E. Deformation of coherent structures // UK Rep. Prog. Phys. 1996. V. 59. P. 511–600.

Jimenez J. Coherent structures in wall-bounded turbulence // J. Fluid Mech. 2018. V. 842. P. 1–100.

Kostrykin S.V., Khapaev A.A., Yakushkin I.G. The influence of nonlinear bottom friction on the properties of decaying cyclonic and anticyclonic vortex structures in a shallow rotated fluid // J. of Fluid Mechanics. 2014. V. 753. P. 217–241.

Romanova N.N., Annenkov S.A. Three–wave resonant interactions in unstable media // J. Fluid Mech. 2005. V. 539. P. 57–91.

Vallis G.K. Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation. Cambridge University Press, 2017. 326 p.

Yakushkin I.G. On the structural description of random fields // Waves in Random and Complex Media. 2023. V. 33. Issue 5–6. P. 1195–1212.

LAGRANGIAN (PHASE) STRUCTURES IN AN INCOMPRESSIBLE FLUID

© 2025 I. G. Yakushkin

Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences,
Pyzhevsky per., 3, bld. 1, Moscow, 119017 Russia

e-mail: lgg@ifaran.ru, iyakushkin@yandex.ru

The paper considers a geometric approach to describing structures in barotropic flows of an incompressible fluid. This type of description has an analogy in geometric optics. The evolution of equilibrium flows is considered, in which the trajectories of Lagrangian invariants, expressed through the vorticity of the flow, change. The connection between vorticity and velocity is established through the asymptotic behavior of the solution to the Poisson equation. The limits of applicability of the proposed approach are discussed, as well as the possibility of its generalization for baroclinic flows.

Keywords: structures, Lagrangian invariants, vorticity