

УДК 551.511; 551.513; 52-55

СТАБИЛИЗАЦИЯ ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ГЕОСТРОФИЧЕСКОМ ПОТОКЕ С ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ СДВИГОМ ПРИ УЧЕТЕ РЕЛЬЕФА И БАРОКЛИННОСТИ

© 2025 г. Е. Б. Гледзер*, А. Е. Гледзер**, О. Г. Чхетиани*

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН,
Пыжевский пер., 3, стр. 1, Москва, 119017 Россия

*e-mail: lgg@ifaran.ru

**e-mail: aegledzer@gmail.com

Поступила в редакцию 29.10.2024 г.

После доработки 09.12.2024 г.

Принята к публикации 27.12.2024 г.

Рассмотрены механизмы стабилизации неограниченно возрастающих волновых чисел транзиентных мод одноволновых решений уравнений динамики атмосферы при учете рельефа и различных форм бароклинности с сохранением свойств решений как точных. Проведены оценки величин волновых чисел при действии сдвигов скорости и наклонов рельефа, учете бароклинности, а также в экмановском погранслое в сравнении с наблюдениями периодических структур облачности. Отмечены величины параметров, при которых возможно блокирование волн, указаны также бимодальные решения уравнений. Оценки параметров стационарирования транзиентной волны с учетом бароклинности в протопланетных дисках (как пример, отличной от бароклинности в геофизической гидродинамике) показывают многополосную структуру полей скорости.

Ключевые слова: транзиентные моды, рельеф, бароклинность, уравнения Чарни-Обухова, протопланетные диски, структура облачности

DOI: 10.7868/S3034648725040025

1. ВВЕДЕНИЕ

Одноволновые решения баротропных уравнений динамики атмосферы с монотонно меняющимся во времени волновым числом k получили в свое время название транзиентных. Вероятно, эти решения представляются наиболее простыми формулами, которые описывают решения уравнения Чарни–Обухова среди большого числа подходов и решений для сдвиговой гидродинамической неустойчивости с влиянием β -эффекта:

$$\begin{aligned} \psi &= a(t)e^{i(k_x x + k_y(t)y)} + \\ &+ a^*(t)e^{-i(k_x x + k_y(t)y)} - Uy - S\frac{y^2}{2}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta\psi - \frac{1}{L_0^2}\psi \right) + [\psi, \Delta\psi] + \beta \frac{\partial\psi}{\partial x} &= 0, \\ u &= -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1)$$

где U и S — фоновая скорость и горизонтальный сдвиг скорости соответственно, L_0 — внешний радиусдеформации Россби $L_0 = \sqrt{gH_0}/(2\Omega_0)$ в слое H_0 , Ω_0 — угловая скорость вращения Земли, β — изменение параметра Кориолиса с широтой.

Для зависящего от времени меридионального волнового числа $k_y(t)$ имеется точное уравнение, которое следует из уравнения (1)

$$\begin{aligned} \left(k^2 + \frac{1}{L_0^2} \right) \frac{dk_y(t)}{dt} + Sk^2 k_x &= 0, \\ k^2(t) &= k_x^2 + k_y^2(t), \end{aligned} \quad (2)$$

так что всегда $|k_y| \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$.

В таких решениях энергия волны пропорциональна $k^2 |a|^2$, a — амплитуда волны. И если вначале была мелкая рябь с $k \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$, то после уменьшения k амплитуда $|a|$ увеличивает-

ся. Однако затем волновое число k вновь возрастает с соответствующим затуханием амплитуды $|a|$: все, что из ряби возникло, в рябь и ушло.

На роль подобных возмущений в развитии атмосферных циркуляций впервые внимание было обращено в [Farrell, 1982]. С их возникновением стали связывать также неопределенности прогнозов [Buizza et al., 1995]. В геофизической гидродинамике потоков со сдвигом такие решения изучались в [Чагелишвили и Чхетиани, 1995; Чхетиани и др., 2015; Чхетиани и Калашник, 2018], для бароклиновых возмущений с горизонтальным и вертикальным сдвигом [Калашник и др., 2018], в динамических системах [Шухман, 2005], для систем с вязкостью и сдвигом скорости [Shukhman and Levinski, 2005; Shukhman, 2007], а в решениях для протопланетных дисков возникали в [Knobloch, 1985; Klahr, 2004; Petersen et al., 200a; Petersen et al., 2007b]. Почти 40 лет назад решения с меняющимся волновым числом, $u = Re(U(t)\exp(ik(t)x))$, $k(t) = (k_x(t), k_y(t), k_z(t))$, появились при исследовании трехмерной неустойчивости в неограниченных течениях с эллиптическими линиями тока (эллиптическая неустойчивость) [Bayly, 1986; Craik, 1989], упоминались для неустойчивости в замкнутых эллипсоидальных объемах [Gledzer and Ponomarev, 1992]. Развитие подхода при рассмотрении эволюции локализованного вихревого возмущения в эллиптическом течении было выполнено в линейном анализе [Shukhman, 2007] и нелинейном [Karp et al., 2017]. Была обнаружена важная роль таких мод в задаче о циркуляции Хэдли с горизонтально неоднородным распределением температуры [Гледзер, 2008].

Их привлекательность заключается в том, что эти решения точные для соответствующих уравнений движения и относительно просты для использования. Однако монотонность изменения волнового числа с возникновением волн как бы из ничего с последующим исчезновением затрудняет их интерпретацию для конкретных приложений. Кроме того, до сих пор не исследовалось влияние на такие волны эффектов рельефа подстилающей поверхности, а также бароклиновости. Ниже предлагаются на основе этих факторов сценарии стабилизации волнового числа и амплитуды получаемых решений.

2. УЧЕТ РЕЛЬЕФА И БАРОКЛИНОСТИ

Уравнение для потенциального вихря с учетом рельефа $h(x, y)$ для слоя H_0 с бета-эффектом в баротропном приближении имеет вид (см. [Должанский, 2011; Cushman-Roisin and Beckers, 2009])

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta \Psi - \frac{1}{L_0^2} \Psi \right) + [\Psi, \Delta \Psi] + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{f_0}{H_0} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{f_0}{H_0} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \Psi, \quad (3)$$

где $f_0 = 2\Omega_0 \sin \phi$, ϕ — широта местности; входит отношение рельефа h к толщине однородного по температуре слоя H_0 .

Рельеф зададим в форме

$$\frac{f_0}{H_0} h(x, y) = \delta y + \varepsilon x + \gamma y^2 / 2, \quad (4)$$

со склонами δ , ε (размерность $1 / (\text{м с})$) по координатам y , x и со сдвигом наклона γ размерность $1 / (\text{м}^2 \text{ с})$.

Функция тока

$$\Psi = -U_0 y - S y^2 / 2 + V_0 x + a(t) \cos(f) + b(t) \sin(f), \quad (5)$$

$$f = k_x x + k_y y,$$

где U_0 , V_0 — постоянные величины, задающие скорости по осям x , y , сдвиг скорости S . Заметим, что параметры S и γ задают сдвиги скорости и наклона рельефа.

Внешнее действие Ψ (влияние внешних факторов) задаем в линейной форме $\Psi = F + G y$. Здесь формально включен постоянный источник потенциального вихря, а также добавка, линейно зависящая от широты y . Величины U_0 , V_0 , S , относящиеся к полю скорости, также являются внешними по отношению к динамике, задаваемой уравнением (3) для потенциального вихря. Однако между всеми этими величинами и параметрами рельефа обнаруживается связь в виде уравнений (6).

Тогда все члены в уравнении окажутся самосогласованы, и в результате получим уравнения для U_0 , V_0 , $k_y(t)$, $a(t)$, $b(t)$

$$\gamma V_0 + \varepsilon S = \Gamma, \quad (\beta + \delta) V_0 + \varepsilon U_0 = F, \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 & \left(k^2 + \frac{1}{L_0^2} \right) \frac{dk_y(t)}{dt} + (Sk^2 - \gamma)k_x = 0, \\
 & k^2(t) = k_x^2 + k_y^2(t), \\
 & \frac{d[(k^2 + 1/L_0^2)a(t)]}{dt} + b(t)Q = 0, \\
 & \frac{d[(k^2 + 1/L_0^2)b(t)]}{dt} - a(t)Q = 0, \\
 & Q = qk_x + pk_y(t), \quad q = k^2U_0 - \beta - \delta, \\
 & p = k^2V_0 + \varepsilon.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Уравнения (6) задают постоянные компоненты скорости U_0 , V_0 через компоненты наклонов ε , δ и сдвига скорости S и сдвига наклона γ по оси y . В уравнениях также заданной считается x -компоненты волнового числа k_x . Из уравнений в (7) для $a(t)$, $b(t)$ следует, что сохраняется инвариант $(k^2 + 1/L_0^2)^2(a^2 + b^2)$, связанный с квадратом вихря $(\Delta\psi)^2$. Заметим, что если внешний источник отсутствует, $F = 0$, $\Gamma = 0$, то в уравнениях либо отсутствуют постоянная меридиональная скорость V_0 и сдвиг ε по координате x (долгота), либо скорости U_0 , V_0 связаны со сдвигом скорости S и параметрами рельефа δ , ε , γ соотношениями $V_0 = -\frac{\varepsilon}{\gamma}S$, $U_0 = (\beta + \delta)\frac{S}{\gamma}$.

Уравнение для $k_y(t)$ в (7), которое отличается от (2) только членом с γ , допускает стационарное решение

$$k^2 = \frac{\gamma}{S}, \tag{8}$$

при сдвигах γ , S одного знака. Это возможно, если при $\gamma > 0$ имеется долина вдоль параллели $y = 0$ со средней скоростью $U_0 = Sy$ при сдвиге $S > 0$ (к северу скорость увеличивается). Также при $\gamma < 0$ — горный хребет вдоль параллели со сдвигом $S < 0$ скорости $U_0 = Sy$ — скорость увеличивается к югу. Также необходим порог $\frac{\gamma}{S} > k_x^2$.

Для этого стационарного состояния можно найти решение для амплитуд $(a(t), b(t)) = \exp(i\omega t)(A, B)$, $A, B = \text{const}$,

$$\omega = \frac{Q}{k^2 + 1/L_0^2} = \frac{qk_x + pk_y}{k^2 + 1/L_0^2}. \tag{9}$$

Тогда волна $\exp(i(k_x x + k_y y + \omega t))$ примет форму

$$\begin{aligned}
 & \exp(i(k_x x + k_y y + \omega t)) = \\
 & = \exp(ik_x(x + u_x t) + ik_y(y + u_y t)), \\
 & u_x = \frac{q}{k^2 + 1/L_0^2}, \quad u_y = \frac{p}{k^2 + 1/L_0^2},
 \end{aligned} \tag{10}$$

где u_x , u_y — компоненты скорости переноса волны и $q = k^2U_0 - \beta - \delta$, $p = k^2V_0 + \varepsilon = \Gamma/S$.

В предельном переходе $k \rightarrow \infty$, скорость переноса волны совпадает с внешней $u_x \rightarrow U_0$, $u_y \rightarrow V_0$.

В приведенных формулах горизонтальное волновое число было произвольным. Пусть частота ω будет произвольной. Тогда из уравнений

$$\omega = k_x u_x + k_y u_y, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \gamma/S \tag{11}$$

можно выразить k_x , k_y через остальные параметры и ω :

$$\begin{aligned}
 k_x &= \frac{\omega u_y}{u_x^2 + u_y^2} \pm \frac{u_x}{u_x^2 + u_y^2} \left(\frac{\gamma}{S} (u_x^2 + u_y^2) - \omega^2 \right)^{1/2}, \\
 k_y &= \frac{\omega u_x}{u_x^2 + u_y^2} \mp \frac{u_y}{u_x^2 + u_y^2} \left(\frac{\gamma}{S} (u_x^2 + u_y^2) - \omega^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

То есть, получается в какой-то степени бимодальность: два решения с одинаковой частотой ω отличаются большей или меньшей зональностью или меридиональностью в зависимости от величины компонент k_x , k_y (см. [Charney and DeVore, 1979; Обухов и др., 1976; Гледзер и др., 2021]). Речь здесь идет о множественности некоторых состояний атмосферных движений, в частности, когда имеются два отличающихся состояния. Двумодальность восходит к первой из этих упомянутых работ, в которой и учитывался рельеф в простейшей модели с небольшим числом переменных. В работе А.М. Обухова с сотрудниками был найден другой вид бимодальности — в замкнутых сосудах наблюдались режимы с разнонаправленными осями крупномасштабного вращения жидкости при одной и той же величине внешней генерации течений.

Выбор решения зависит от устойчивости состояния $k^2 = \gamma/S$: из уравнения для $k_y(t)$ при $k_y(t) = k_y + k'_y$ имеем в линейном приближении

$$(k^2 + 1/L_0^2) \frac{dk'_y}{dt} = -2Sk_x k_y k'_y. \quad (13)$$

Возмущения k'_y будут затухать, если $Sk_x k_y > 0$. На рис. 1 показан переход к стационарным режимам волнового числа k_y при выполнении этого условия для двух значений $\sqrt{\gamma/S}$ в безразмерных переменных (kL_0, St) при $\sqrt{\gamma/S}L_0 = 0.4, 0.7$ с малыми начальными значениями для безразмерных переменных $k_x L_0 = -0.01$, $k_y L_0 = -0.01$. Тогда при $St \rightarrow \infty$, $k_y L_0 \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma}{S} L_0^2 - (k_x L_0)^2} \approx 0.4, 0.7$ соответственно.

Скорость переноса волны u_x, u_y может обращаться в нуль, т.е. волна окажется заблокированной, если $p = 0, q = 0$: при $k^2 = \gamma/S$,

$$\frac{\gamma}{S} U_0 = \beta + \delta, \Gamma = 0. \quad (14)$$

Условие $\Gamma = 0$ означает, что отсутствует изменение термических факторов с широтой y , отсюда $u_y = 0$. Если пренебречь β -эффектом, т.е. волна не планетарного масштаба, то условие $u_x = 0$ — отсутствие зонального переноса волны, примет вид

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{S}{U_0}. \quad (15)$$

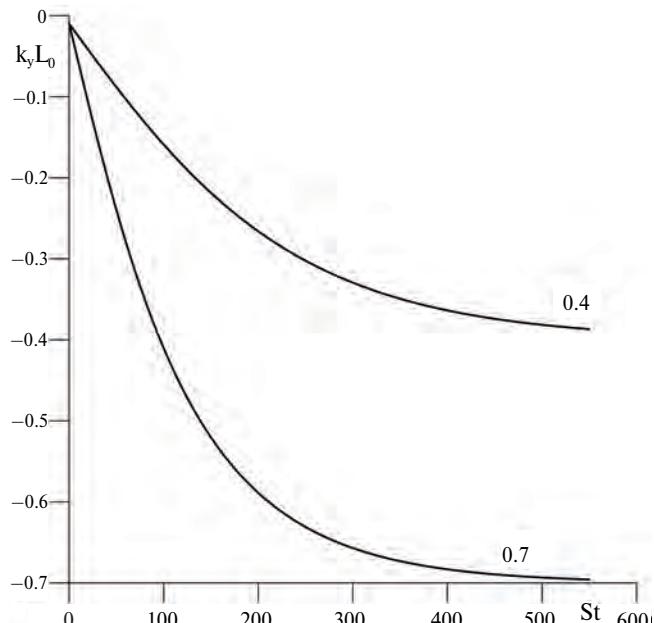


Рис. 1. Переход к стационарным режимам безразмерного волнового числа $k_y L_0$ при $\sqrt{\gamma/S}L_0 = 0.4, 0.7; k_x L_0 = -0.01$

Это условие означает, что блокирование волны возможно, если отношение сдвига скорости к самой скорости совпадает с отношением сдвига наклона к его наклону: геометрия поля скорости должна подстроиться к геометрии рельефа. Отметим, что возможная связь транзитентных мод с блокированием указывалась в работе [Чхетиани и Калашник, 2018].

Влияние бароклинности рассмотрим в простейшем виде, сопоставляя вывод с приведенным выше учетом рельефа. Исходным для учета бароклинности (без рельефа) является уравнение сохранения потенциального вихря Π (см. [Должанский, 2011], уравнение (9.24)):

$$\Pi = \Omega_z + f_0 + \frac{g}{\rho f_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \rho \frac{\theta}{\Theta_z} \right), N^2 = \frac{g}{\Theta_z} \frac{d\Theta_z}{dz}, \quad (16)$$

где θ — отклонение потенциальной температуры от равновесного значения Θ_z , зависящего только от вертикальной координаты z : $\Theta = \Theta_z(z) + \theta$. Далее обычно это отклонение выражается через производную по z от функции тока, и уравнение замыкается. Предположим, что имеется не только равновесная потенциальная температура Θ_z , но и некоторая фоновая потенциальная температура, зависящая от предыдущих микрорельефных и температурных условий, $\theta = \theta_f + \theta'$, причем Θ_z и θ_f от вертикальной координаты z зависят линейно:

$$\Theta_z = \Theta_z^0 \cdot z + \text{const}, \Theta_z^0 = \text{const}, \quad (17)$$

$$\theta_f = \theta_f^0(x, y) \cdot z + \text{const},$$

где вертикальный градиент $\theta_f^0(x, y)$ зависит от горизонтальных координат x, y .

Тогда добавка в потенциальном вихре

$$\frac{g}{\rho f_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \rho \frac{\theta_f}{\Theta_z} \right) = f_0 \frac{\partial \theta_f / \partial z}{d\Theta_z / dz} = f_0 \frac{\theta_f^0(x, y)}{\Theta_z^0}, \quad (18)$$

аналогична члену $-f_0 \frac{h}{H_0}$ в потенциальном вихре при учете рельефа

$$\Pi_r = \Omega_z + f_0 - f_0 \frac{h}{H_0}. \quad (19)$$

Поэтому влияние бароклинности в этой простой модели сводится к уравнению для «рельефа» h_f . По аналогии с (4) имеем

$$f_0 \frac{h_f}{H_0} = -f_0 \frac{\theta_f^0(x, y)}{\Theta_z^0} = \delta_f y + \epsilon_f x + \gamma_f y^2/2. \quad (20)$$

Коэффициенты в правой части определяются по зависимости от x, y вертикального градиента θ_f отклонения потенциальной температуры. Отсюда можно найти коэффициент γ_f «виртуальной» горы. Формулы (20) аналогично приведенным выше при учете рельефа могут быть использованы для оценки длины волны при ее стабилизации в потоке (см. далее).

3. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ БАРОТРОПНОГО ПОЛЯ

3.1. Волны при сдвигах скорости и рельефа

Рассматриваемая волна с волновым числом $k = (\gamma/S)^{1/2}$ в относительно тонком однородном слое H_0 порядка нескольких сотен метров при вариации рельефа h в несколько десятков метров может проявиться в виде периодической структуры облачности на верхней границе слоя, как, например, на рис. 2а, 2б.

Рассмотрим для оценок изменение скорости Δu в среднем в 1 м/с на расстоянии 10 км и изменение наклона рельефа на расстоянии $L_g \approx 100$ м при относительной высоте рельефа $h/H_0 \approx 0.1$.

Тогда сдвиг скорости $S \approx \Delta u/L_s \approx 10^{-4}$ (при масштабе 10 км сдвига скорости на 1 м/с, $L_s = 10^4$ м, $\Delta u = 1$ м/с), а $h/H_0 = 0.1$, и из (4) $\gamma = \frac{f_0}{H_0} \frac{2h}{L_g^2}$, $f_0 \approx 10^{-4}$ характерный размер рельефа $L_r = 2L_g$, и получаем $k = 2\pi/L = \sqrt{\gamma/S}$,

$$L = 2\pi\sqrt{S/\gamma} = L_r\pi\sqrt{\frac{\Delta u}{f_0 L_s} \frac{1}{2h/H_0}} = L_r\pi\sqrt{5} \approx 7 \cdot L_r.$$

длина волны почти на порядок превышает горизонтальный масштаб рельефа для выбранных значений относительной высоты горы и масштаба сдвига скорости. Из этих формул следует, что чем меньше перепады рельефа, тем больше расстояние между гребнями волн.

Сдвиг скорости $S = \Delta u/L_s$ фактически задает вихрь ω поля скорости, $\omega \approx S$. Поэтому приведенную выше формулу для L можно переписать в виде

$$L = L_r\pi\sqrt{\frac{\omega}{f_0} \frac{1}{2h/H_0}}. \quad (21)$$

Для крупномасштабных движений атмосферы отношение $\frac{\omega}{f_0} = R_k$ — число Россби–Кибеля

(см. [Должанский, 2011]) — является малой величиной: угловая скорость вращения циклонов и антициклонов значительно меньше угловой скорости вращения Земли. Рассмотрим антициклоническую область, в середине которой сохраняется стратификация, близкая к нейтральной, т.е. $\frac{d\Theta_z}{dz} = \Theta_z^0 \ll \Gamma$, где Γ — равновесный

вертикальный градиент температуры. К внешнему краю антициклона на расстоянии $\approx L_r/2$ стратификация переходит к циклонической с существенной величиной градиента потенциальной температуры

$$|\theta_f^0| = \left| \frac{d\theta_f}{dz} \right| \gg \left| \frac{d\Theta_z}{dz} \right| = |\Theta_z^0|. \quad (22)$$

Из формулы (20) можно оценить величину h/H_0 , входящую в (21), при учете бароклинности атмосферы:

$$\frac{h}{H_0} = \frac{|\theta_f^0|}{|\Theta_z^0|}. \quad (23)$$

Тогда формула (21) для L при учете бароклинных эффектов примет вид

$$L = L_r\pi\sqrt{R_k \cdot \frac{|\Theta_z^0|}{2|\theta_f^0|}}. \quad (24)$$

Отсюда в выбранных условиях (22) и малости числа Россби–Кибеля длина волны может быть намного меньше горизонтальных размеров антициклонической области с нейтральной стратификацией. Возможно этот механизм оказывает некоторое влияние на дистанцию между роллами порядка 5–10 км, показанную на рис. 2в–2е для антициклонов в летние и зимние периоды.

3.2. Волны при сдвиге скорости в экмановском пограничном слое

В приведенных выше формулах длина волны связывалась с горизонтальным масштабом рельефа или антициклонической области при фиксированном отношении его высоты к толщине баротропного слоя. Однако волны в этом слое имеют место, если рельефа нет или он мал, когда, как отмечалось выше, волны из-за рельефа редкие.



Рис. 2. Примеры волн при сдвигах скорости и рельефа: а, б — рисунки из книги [Häckel, 2018]; в — снимок Метеор-М, Роскосмос, Волгоград, 10.07.2024; г — снимок Метеор-М, Роскосмос, Охотское море, 29.12.2023; д, е — роллы зимой, снимки MODIS: с ресурса <https://worldview.earthdata.nasa.gov/>: 06.02.2018 Курская обл., 06.02.2024 Калмыкия

Тогда длины волн можно сопоставлять с толщиной пограничного слоя H_0 , но основную роль может играть также вертикальный сдвиг скорости. При этом в слое H_0 имеется развитая турбулентность, приводящая к образованию экмановского пограничного слоя в приземной части атмосферы и, как следствие, появление периодических

структур в виде упорядоченных спиралевидных вихрей (роллов) с горизонтальной осью, направленной примерно вдоль среднего направления геострофического ветра и заполняющие значительный объем турбулентного атмосферного пограничного слоя (АПС) [Kuettner, 1959; Brown, 1980; Михайлова и Орданович, 1991].

Присутствие роллов часто выявляется на спутниковых изображениях ПС в виде «облачных улиц», выстроившихся в параллельные ряды, отстоящие друг от друга на несколько километров, вытянутые примерно вдоль направления ветра на сотни километров и сохраняющиеся в течении нескольких суток (см. рис. 2в, е). Облака формируются в области восходящих движений между роллами при сопутствующих их образованию термодинамических условиях. Однако, спиралевидные вихри часто присутствуют и в безоблачных условиях (рис. 2в–е). Это подтверждается наблюдением линейных полос (стриков) с параметрами, весьма близкими к роллам, на спутниковых синтетических апертурных радарных изображениях в безоблачных условиях [Alpers and Brummer, 1994; Mourad and Walter, 1996]. Сопоставление радарных изображений и облачных улиц ясно указывает на то, что они являются разной визуализацией одного и того же явления.

В связи с этим можно ставить задачу, как связать упомянутые структуры с условиями в пограничных слоях и конкретными горизонтальными термическими или рельефными неоднородностями.

Развитие роллов связано с неустойчивостями, развивающимися в АПС и формирующими при взаимодействии со средним течением устойчивую вторичную циркуляцию. Можно выделить механизм, связанный с неустойчивостью экмановского слоя в условиях, близких к нейтральным или слабонеустойчивой стратификации. Экмановский профиль средней скорости является результатом равновесия вязких и кориолисовых сил. Основное движение в нем происходит в плоскости параллельной подстилающей поверхности с поворотом вектора скорости вокруг вертикальной оси: если $W(z)$ — комплексная переменная для среднего поля скорости в атмосферном пограничном слое, $W = U - U_G + i(V - V_G)$, где U_G , V_G — геострофическая скорость на верхней границе АПС, то указанное равновесие соответствует уравнению

$$v_t \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - 2i\Omega_0 W = 0, \text{ где } v_t \text{ — турбулентная вяз-}$$

кость, определяющая экмановский масштаб

$$h = \left(\frac{v_t}{\Omega_0} \right)^{1/2} \quad (\Omega_0 \text{ — частота вращения}). \text{ Решение}$$

этого уравнения дает известную спираль Экмана с экспоненциальной зависимостью от высоты, переходящую в геострофическое движение. Задача об устойчивости этого течения приводит решениям с характерными вторичными вихревыми структурами в пограничном слое, которые соответствуют роллам, повернутым на некоторый угол по отношению к направлению геострофического ветра. При этом в поперечном к роллам направлении волновое число α максимально неустойчивого решения, $\exp(i\alpha(y - Ct))$, $Im(\alpha)Re(C) > 0$, оказалось приближенно равным

$$\alpha \approx \frac{\pi}{2H} \quad (25)$$

для слоя толщины H . Если L — длина волны, $L = 2\pi/\alpha$, то $L \approx 4H$. Оценки длины волн — расстояний между роллами приводились в работах [LeMone, 1973; Lilly, 1966; Brown, 1970]. В целом они соответствуют этой величине с небольшими отличиями в большую или меньшую стороны.

Надо отметить, что в экмановском слое также существуют условия для развития транзитентных мод [Foster, 1997; Hibino et al., 2012; Чхетиани и Вазаева, 2019], с которыми связывается развитие субмезомасштабных структур, проявляющихся в длинноволновой области спектра энергии наклоном -1 [Кадер, 1988; Drobinski and Foster, 2003].

4. БАРОКЛИННОСТЬ В ПРОТОПЛАНЕТНЫХ ДИСКАХ

Возможность стабилизации волны в уравнениях баротропной динамики атмосферы, при сохранении свойства решения как точного, связана с простым фактом, что волновое число $k_y(t)$ в уравнениях (1)–(7) — действительная величина. Однако представляет интерес рассмотреть случай, когда $k_y(t)$ — комплексное число. Тогда решение может возрастать или затухать с изменением координаты y . В геофизической гидродинамике таких решений с транзитентными модами пока не найдено. Однако для бароклиновой динамики (упрощенной) протопланетных дисков такие решения могут иметь место.

Уравнения бароклиновой динамики в двумерном (r — радиус, ϕ — азимутальный угол) протопланетном диске представлены во многих

работах (см. [Knobloch, 1985; Klahr, 2004; Petersen et al., 2007a; Petersen et al., 2007b]).

$$\begin{aligned}
 \zeta &= \zeta' + \zeta^\varphi, \quad \zeta' = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\Sigma_0} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right), \\
 \zeta^\varphi &= \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Sigma_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}, \\
 \frac{\partial \zeta}{\partial t} + D(\psi, \frac{1}{\Sigma_0} \zeta) &= \frac{c_p}{r} \frac{\partial \pi_0}{\partial r} \frac{\partial \theta'}{\partial \varphi}, \\
 u &= \frac{1}{\Sigma_0} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = -\frac{1}{r \Sigma_0} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \\
 \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{\Sigma_0} D(\psi, \theta) &= -\frac{\theta - \theta_0(r)}{\tau}, \\
 D(a, b) &= \frac{\partial a}{\partial r} \frac{\partial b}{r \partial \varphi} - \frac{\partial b}{\partial r} \frac{\partial a}{r \partial \varphi},
 \end{aligned} \tag{26}$$

где θ — потенциальная температура; $\theta = T \left(\frac{p_0(r_{in})}{p} \right)^{R/c_p}$, Σ_0 — поверхностная плот-

ность; π_0 — давление Экснера; τ — время радиационного выхолаживания; p — давление; ζ' — компонента завихренности, направленная вдоль радиуса; ζ^φ — компонента завихренности, направленная вдоль орбиты; $\theta - \theta_0(r)$ — отклонение потенциальной температуры от равновесной, зависящей только от радиуса.

Из последнего в (26):

$$\begin{aligned}
 \theta - \theta_0(r) &= -\tau \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{\Sigma_0} D(\psi, \theta) \right), \\
 D(\psi, \theta) &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \theta}{r \partial \varphi} - \frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{\partial \psi}{r \partial \varphi},
 \end{aligned} \tag{27}$$

что вместе со вторым в (26) дает

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \zeta}{\partial t} + D(\psi, \frac{1}{\Sigma_0} \zeta) &= \\
 = -c_p \tau \frac{\partial \pi_0}{\partial r} \left(\frac{\partial}{r \partial \varphi} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{r \partial \varphi} \frac{1}{\Sigma_0} D(\psi, \theta) \right). \tag{28}
 \end{aligned}$$

Максимально упростим уравнения (26), (28), предполагая, что $\Sigma_0 = \Sigma_0(r)$, $\pi_0 = \pi_0(r)$, и потенциальная температура θ также зависит только от радиуса, $\theta = \theta(r)$.

Последний член в (28) преобразуется в

$$\frac{\partial}{r \partial \varphi} \frac{1}{\Sigma_0} D(\psi, \theta) = \frac{\partial}{r \partial \varphi} \frac{1}{\Sigma_0} \left(-\frac{\partial \psi}{r \partial \varphi} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = -\frac{\partial \theta}{\partial r} \zeta^\varphi, \tag{29}$$

и уравнение (28) примет форму

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + D(\psi, \frac{1}{\Sigma_0} \zeta) = -\kappa \zeta^\varphi, \quad \kappa = -c_p \tau \frac{\partial \pi_0}{\partial r} \frac{\partial \theta}{\partial r}, \tag{30}$$

где κ — коэффициент трения или инкремент, зависящий от радиальных изменений давления Экснера и потенциальной температуры. Такая форма бароклинной динамики в геофизической гидродинамике не встречается: в правой части уравнения — трение или инкремент, зависящие от $\pi_0(r)$, $\theta(r)$, которые включают φ — компоненту завихренности (т. е. вдоль орбит), хотя в левой части уравнения — изменение полной завихренности (в свое время А.М. Обухов называл это «возбуждение инкрементом». Если перейти к локальным декартовым координатам $dx = rd\varphi$, $dy = dr$, $D(\psi, z) = u \partial z / \partial x + v \partial z / \partial y$, $u = \partial \psi / \Sigma_0 \partial y$, $v = -\partial \psi / \Sigma_0 \partial x$, то уравнение упрощается (u — координата по радиусу)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \nabla \zeta = C \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad C = -c_p \tau \pi_0' y. \tag{31}$$

Это уравнение отличается от баротропных для атмосферных движений: в уравнении (3) бета-член (орографический) имеет вид $\frac{f_0}{H_0} \frac{\partial h}{\partial y} \cdot v$,

а в последнем уравнении имеем $C \frac{\partial \theta}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$, где

роль рельефа приняла потенциальная температура, но вместо меридиональной скорости v появилась зональная производная от нее.

Итак, рассмотрим двумерное уравнение вихря, как и в (3), с правой частью из (31) с потенциальной температурой и потенциальным вихрем (независимо от определений (26), здесь важна форма правой части (31)):

$$\theta = \gamma \frac{y^2}{2}, \quad \Pi = \Delta \tilde{\psi}, \quad u = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x}, \tag{32}$$

где γ задана,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + u \frac{\partial \Pi}{\partial x} + v \frac{\partial \Pi}{\partial y} = C \frac{d\theta}{dy} \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{33}$$

Решение ищем в форме

$$\begin{aligned}
 \tilde{\psi}(x, y, t) &= -u_0 y + v_0 x - S \frac{y^2}{2} + \\
 &+ A(y, t) \exp(ik_x x) + A^*(y, t) \exp(-ik_x x), \\
 A(y, t) &= a(t) \exp(ik_y(t) y),
 \end{aligned} \tag{34}$$

где u_0 , v_0 , S , k_x — заданные средние компоненты скорости, сдвиг, зональное волновое число, функции $a(t)$ и $k_y(t)$ подлежат определению.

Для $k_y(t)$, $a(t)$ получатся уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dk_y(t)}{dt} + Sk_x + iC\gamma \frac{k_x^2}{k_x^2 + k_y^2(t)} &= 0, \\ \frac{da(t)}{dt} + i[u_0 k_x + v_0 k_y(t)]a(t) + \\ + a(t) \frac{dk_y^2(t)}{dt} \frac{1}{k_x^2 + k_y^2(t)} &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Из первого в (35) уравнения следует, что $k_y(t)$ всегда содержит мнимую часть $\text{Im}[k_y(t)] \neq 0$. И следствием этого является неравенство нулю нелинейных квадратичных по $a(t)$ членов в уравнении (33):

$$\begin{aligned} N(a, y) = -(a \cdot a^*) \cdot k_x (k_y - k_y^*)^2 (k_y + k_y^*) \\ \exp(i(k_y - k_y^*)y). \end{aligned} \quad (36)$$

Если k_y — действительная величина, то $N = 0$, как в случае уравнений (1)–(3), и соответствующие одноволновые решения оказываются точными.

Чтобы сохранить это свойство точности решения уравнения (33), можно дополнить формулы для потенциальной температуры и потенциального вихря членами с зависимостью от t, y :

$$\theta = \gamma \frac{y^2}{2} + \tilde{\theta}(t, y), \quad \Pi = \Delta \tilde{\psi} + G(t, y), \quad (37)$$

а в функцию тока (34) добавить член $\psi_0(t, y)$. Если в (37) параметр γ произвольный, то функции ψ_0 , $\tilde{\theta}$, G определяются с учетом уравнений (35), (36).

Подстановка (34) с добавленными слагаемыми G , ψ_0 в (33) приводит к появлению в левой части уравнения слагаемых, с зависимостью только от t , y , включая $N(a, y)$. Это дает уравнение для G , ψ_0 с производной по времени

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) (\psi_0'' + G) + N(a, y) = 0, \quad (38)$$

где штрихи означают производные по y .

Кроме того, из правой части (33) появляется член $-C\tilde{\theta}' \left(Ae^{ik_x x} + A^* e^{-ik_x x} \right)$. Вместе с аналогичными слагаемыми с участием производных по

у функций G , ψ_0 от нелинейных слагаемых из левой части уравнения (33) при обращении в нуль коэффициента при $Ae^{ik_x x}$, $A^* e^{-ik_x x}$ имеем уравнение:

$$\tilde{\theta}' + i \frac{1}{Ck_x} \left[(k_x^2 + k_y^2) \psi_0' + \psi_0''' + G' \right] = 0. \quad (39)$$

Так как все три используемые выше величины — действительные, то из последнего уравнения в (38), (39) имеем при $k_y(t) = R_k(t) + i \cdot I_k(t)$,

$$\begin{aligned} (k_x^2 + R_k^2 - I_k^2) \psi_0' + \psi_0''' + G' &= 0, \\ \tilde{\theta}' &= \frac{2}{Ck_x} R_k \cdot I_k \cdot \psi_0'. \end{aligned} \quad (40)$$

Величины R_k , I_k зависят только от времени t . Поэтому

$$\psi_0''' + G = -(k_x^2 + R_k^2 - I_k^2) \psi_0 + c_1(t), \quad (41)$$

и из уравнения (38) получим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) (k_x^2 + R_k^2 - I_k^2) \psi_0 = N(a, y) + c_2(t). \quad (42)$$

Отсюда определяются все три величины ψ_0 , G , $\tilde{\theta}$ с зависимостью от aa^* .

Уравнения (35) для амплитуды $a(t)$ и волнового числа $k_y(t)$ имеют место как для линейного приближения при $|a(t)| \rightarrow 0$, так и в рассмотренном случае нелинейной задачи. Стационарное решение для $k_y(t) = k_{0y}$ равно:

$$k_{0y} = \pm \sqrt{-iZ_n \left| \frac{C\gamma}{S} \right| k_x} \sqrt{1 - iZ_n \left| \frac{S}{C\gamma} \right| k_x}, \quad (43)$$

где Z_n — знак $\frac{C\gamma}{S}$.

Для оценок рассмотрим случай длинноволновых по x возмущений,

$$k_x \ll \left| \frac{C\gamma}{S} \right|, \quad C = -c_p \tau \pi'_{0y}. \quad (44)$$

Тогда приближенно

$$k_{0y} \approx \pm \frac{1 - iZ_n}{2} k_x \sqrt{\left| \frac{C\gamma}{S} \right| \cdot \frac{1}{k_x}}. \quad (45)$$

Поэтому $|k_{0y}| \gg k_x$, т.е. длина волны по направлению y (радиальному) намного меньше длины по азимутальному x . В неравенстве для k_x в правой части $C\gamma/S$ входят как характери-

стики диска, $c_p \tau \pi'_0 y$, бароклинности γ , так и сдвига скорости S . Такая вытянутая структура волны отражает многополосную картину полей в диске, найденную численно в работах [Petersen et al., 2007a; Petersen et al., 2007b]. Эти же величины определяют экспоненциальный рост или затухание скорости при увеличении y , т.е. радиуса диска, $\exp(-I_k \cdot y)$, $I_k = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left| \frac{C\gamma k_x}{S} \right|}$.

5. ВЫВОДЫ

Учет рельефа или расслоенности геофизических течений со сдвигом скорости может оказывать стабилизирующее влияние на масштаб возникающей в потоке волны. Необходимое условие для этого — устойчивость соответствующих решений уравнений (6), (7). При согласовании сдвигов скорости и наклонов рельефа с их средними значениями возможно блокирование — образование стоячей волны. Для волны с фиксированной частотой реализуется бимодальность: два решения с отличающимися зональной и меридиональной картинами поля скорости. Для упрощенных уравнений протопланетных дисков, которые были рассмотрены как пример иного, чем в геофизической гидродинамике, влияния бароклинных эффектов, также имеют место стационарные решения для радиального волнового числа.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Общая постановка проблемы и анализ транзиентных возмущений в геофизических течениях выполнен в рамках Государственного задания № 125020501536-2. Исследования динамических эффектов рельефа и бароклинности выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-17-00273).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Гледзер А.Е., Гледзер Е.Б., Xанаев А.А., Чхетиани О.Г. Многорежимность в тонких слоях жидкости во вращающихся кольцевых каналах // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2021. № 4. С. 138–150.

Гледзер Е.Б. Параметры подобия и центробежная конвективная неустойчивость горизонтально неоднородных циркуляций типа Хэдли // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2008. Т. 44. № 1. С. 36–47.

Должанский Ф.В. Основы геофизической гидродинамики. М.: Физматлит, 2011, 264 с.

Кадер Б.А. Трехслойная структура неустойчиво стабилизированного приземного слоя атмосферы // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1988. Т. 24. № 12. С. 1235–1250.

Калашник М.В., Чхетиани О.Г., Чагелишвили Г.Д. Новый класс краевых бароклинных волн и механизм их генерации // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2018. Т. 54. № 4. С. 361–370.

Михайлова Л.А., Орданович А.Е. Когерентные структуры в пограничном слое атмосферы // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1991. Т. 27. № 6. С. 593–613.

Обухов А.М., Глуховский А.Б., Черноуско Ю.Л. О явлениях переброса в простейших гидродинамических системах // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1976. Т. 13. № 11. С. 1123–1130.

Чагелишвили Г.Д., Чхетиани О.Г. Трансформация волн Россби в сдвиговых течениях // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 62. Вып. 4. С. 41–48.

Чхетиани О.Г., Вазаева Н.В. Об алгебраических возмущениях в атмосферном пограничном слое // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2019. Т. 55. № 5. С. 62–75.

Чхетиани О.Г., Калашник М.В. Связь блокингов с транзиентными неустойчивостями в «Интенсивные атмосферные вихри и их динамика» / Под ред. И.И. Мохова, М.В. Курганского, О.Г. Чхетиани. М.: Геос, 2018. С. 189–199.

Чхетиани О.Г., Калашник М.В., Чагелишвили Г.Д. Динамика и блокирование волн Россби в квазидвумерных сдвиговых течениях // Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 101. Вып. 2. С. 84–89.

Шухман И.Г. Транзиентный рост и оптимальные возмущения на примере простейшей динамической модели // Доклады РАН. 2005. Т. 402. С. 759–761.

Alpers W., Brummer B. Atmospheric boundary layer rolls observed by the synthetic aperture radar aboard the ERS-1 satellite // J. Geophys. Res. 1994. V. 99. P. 12613–12621.

Bayly B.J. Three-dimensional instability of elliptical flow // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. 2160–2171.

Brown R.A. A secondary flow model for the planetary boundary layer // J. Atmos. Sci. 1970. V. 27. P. 742–757.

Brown R.A. Longitudinal instabilities and secondary flows in the planetary boundary layer // Rev. Geophys. Space Phys. 1980. V. 18. P. 683–697.

Buizza R., Palmer T.N. The singular-vector structure of the atmospheric global circulation // J. Atmos. Sci. 1995. V. 52. № 9. P. 1434–1456.

- Charney J.G., DeVore J.G.* Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking // *J. Atmos. Sci.* 1979. V. 36. P. 1205–1216.
- Craik A.D.D.* The stability of unbounded two- and three-dimensional flows subject to body forces: some exact solutions // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 198. P. 275–295.
- Cushman-Roisin B., Beckers J.-M.* *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics* // Academic Press. 2009. 768 p.
- Drobinski P., Foster R.C.* On the origin of near-surface streaks in the neutrally-stratified planetary boundary layer // *Boundary-Layer Meteorology*. 2003. V. 108. P. 247–256.
- Farrell B.F.* The initial growth of disturbances in a baroclinic flow // *J. Atmos. Sci.* 1982. V. 39. P. 1663–1686.
- Foster R.C.* Structure and energetics of optimal Ekman layer perturbations // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 333. P. 97–123.
- Gledzer E.B., Ponomarev V.M.* Instability of bounded flows with elliptical streamlines // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 240. P. 1–30.
- Häckel H.* *Wolken und andere Phänomene am Himmel* // EugenUlmer KG. 2018.
- Hibino K., Ishikawa H., Ishioka K.* Effect of a capping inversion on the stability of an Ekman boundary layer // *J. Meteorol. Soc. Jpn. Ser. II*. 2012. V. 90. № 2. P. 311–319.
- Karp M., Shukhman I.G., Cohen J.* Evolution of finite-amplitude localized vortices in planar homogeneous shear flows // *Phys. Rev. Fluids*. 2017. V. 2. P. 024701.
- Klahr H.* The global baroclinic instability in accretion disks. II. Local linear analysis // *The Astrophysical Journal*. 2004. V. 606. P. 1070–1082.
- Knobloch E.* The stability of non-separable barotropic and baroclinic shear flows // *Astrophys. Space. Sci.* 1985. V. 116. P. 149–163.
- Kuettner J.P.* The band structure of the atmosphere // *Tellus*. 1959. V. 11. P. 267–294.
- LeMone M.A.* The structure and dynamics of horizontal roll vortices in the planetary boundary layer // *J. Atmos. Sci.* 1973. V. 30. P. 1077–1091.
- Lilly D.K.* On the instability of Ekman boundary flow // *J. Atmos. Sci.* 1966. V. 23. P. 481–494.
- Mourad P.D., Walter B.A.* SAR streaks vs cloud streets: viewing a cold air outbreak using satellite-based SAR and AVHRR imagery // *J. Geophys. Res.* 1996. V. 101. P. 16391–16400.
- Petersen M.R., Julien K., Stewart G.R.* Baroclinic vorticity production in protoplanetary disks. I. Vortex Formation // *The Astrophysical Journal*. 2007. V. 658. P. 1236–1251.
- Petersen M.R., Stewart G.R., Julien K.* Baroclinic vorticity production in protoplanetary disks. II. Vortex growth and longevity // *The Astrophysical Journal*. 2007. V. 658. P. 1252–1263.
- Shukhman I.G., Levinski V.B.* Temporal evolution of a localized weak vortex in viscous circular shear flows // *Phys. Fluids*. 2005. V. 17. P. 017104.
DOI: 10.1063/1.1828125.
- Shukhman I.G.* Evolution of a localized vortex in plane nonparallel viscous flows with constant velocity shear. II: Elliptic flow // *Phys. Fluids*. 2007. V. 19. P. 017106.
DOI: 10.1063/1.2424678.

**THE STABILIZATION OF WAVE DISTURBANCES
IN A GEOSTROPHIC HORIZONTAL SHEAR FLOW WITH ACCOUNT
OF RELIEF AND BAROCLINICITY**

© 2025 E. B. Gledzer*, A. E. Gledzer**, O. G. Chkhetiani*

*Obukhov Institute of Atmospheric Physics RAS,
Pyzhevsky per., 3, bld. 1, Moscow, 119017 Russia*

*e-mail: lgg@ifaran.ru

**e-mail: aegledzer@gmail.com

The stabilization mechanisms of unboundedly increasing wave numbers of transient modes for single-wave solutions of the atmospheric dynamics equations are considered, taking into account the relief and various forms of baroclinicity with preservation of the properties of the solutions as exact ones. Estimates of the wave numbers under the action of velocity shears and relief inclinations, baroclinicity, and also in the Ekman boundary layer in comparison with observations of periodic cloud structures have been made. Parameter values at which wave blocking is possible are noted. Bimodal solutions of the equations are also indicated. Estimates of the parameters of transient wave stationarity taking into account baroclinicity in protoplanetary disks (as an example, different from baroclinicity in geophysical hydrodynamics) show a multiband structure of velocity fields.

Keywords: transient modes, relief, baroclinicity, Charney–Obukhov equation, protoplanetary discs, cloud structures