

УДК 551.511.32; 551.513; 551.515; 519.63

## РЕЖИМЫ И ПЕРЕХОДЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКОВ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ (ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ)

© 2025 г. А. Е. Гледзер

*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Пыжевский пер., 3, Москва, 119017 Россия*

*e-mail: aegledzer@gmail.com*

Поступила в редакцию 09.04.2024 г.

После доработки 28.10.2024 г.

Принята к публикации 15.11.2024 г.

В численных экспериментах изучается возможность существования различающихся режимов баротропной циркуляции во вращающихся замкнутых кольцевых каналах, когда внешнее воздействие на некоторое время увеличивается, а затем возвращается к прежнему значению при неизменных прочих параметрах течения. Режимы отличаются как числом вихрей в потоке или их расположением, так и скоростью переноса по каналу. Возможен также возврат к режиму, практически не отличающимся от исходного после восстановления значений параметров, определяющих течение.

**Ключевые слова:** кольцевые каналы, источники-стоки, МГД-генерация, уравнения мелкой воды, аномалии общей циркуляции, блокирование, волны Россби

DOI: 10.7868/S3034648725050063

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В середине 70-х гг. прошлого века в лаборатории А.М. Обухова была создана (и ныне действует) экспериментальная установка генерации гидродинамических течений в трехосном эллипсоиде, в которой наблюдался режим двумодальности течений – два режима течений при одной и той же величине внешней генерации [Обухов и др., 1976]. Эти режимы отличались направлениями осей вращения вихря в эллипсоиде. Объяснение перехода между режимами достаточно простое. При постоянном действии внешней силы образуется стационарный режим вращения вихря с фиксированным направлением оси вращения. Таких направлений вращения может быть два, по числу стационарных решений уравнений движения. При отключении внешней силы образовавшийся вихрь продолжает вращаться с затуханием величины скорости, однако его ось вращения поворачивается в произвольном направлении. Когда ось

вращения приближается к какому-то из двух стационарных состояний, включим ту же внешнюю силу. И именно это направление вращения будет реализовано в дальнейшем. Условием для этого является устойчивость соответствующего состояния (см. [Гледзер и др., 1981, с. 256]).

На основе малокомпонентной модели переходы между режимами в эллипсоиде были описаны в [Гледзер и др., 1981; Гледзер и Пономарев, 1977]. В рамках геофизической гидродинамики двумодальность была обнаружена в работе [Charney and DeVore, 1979] с учетом топографии (см. также [Kallen and Wiin-Nielsen, 1980; Kallen, 1981; Gluhovsky et al., 2001; Koo and Ghil, 2002; Wallace and Cheng, 1991]), в которой с помощью модели с небольшим числом переменных и конечно-разностной схемы с относительно большим числом степеней свободы были получены решения с существенно отличающимися величинами зональной и волновой компонент скорости.

В работе [Гледзер и др., 2021] указанные виды многорежимности, отличающиеся от исследованной в работе [Charney and DeVore, 1979], рассмотрены на основе лабораторных и численных экспериментов в кольцевых вращающихся каналах. Такие эксперименты предназначены для моделирования крупномасштабных атмосферных процессов в баротропном приближении с учетом  $\beta$ -эффекта с помощью конического дна. Параметры экспериментов подбираются таким образом, чтобы число Россби было порядка 0.1–0.2, что означает малость угловых скоростей вращения циклонических и антициклонических вихрей по сравнению с угловой скоростью вращения канала как целого (имитация быстровращающихся планет).

Результаты численных экспериментов в работе [Гледзер и др., 2021] носили предварительный характер и были направлены на установление самого факта многорежимности во вращающемся кольцевом канале с внешней накачкой энергии для дальнейших исследований в лабораторном эксперименте. Следует отметить, что в лабораторном и численном экспериментах методика экспериментов Обухова — исключение внешнего подвода энергии — не может быть применена, так как при отключении внешних притоков–оттоков в жидкости или тока при МГД-генерации течение быстро затухает, поскольку осуществляется в тонком слое жидкости. Поэтому в [Гледзер и др., 2021] был выбран метод усиления внешней силы с возвратом к прежним величинам.

В данной работе на основе численных экспериментов исследуются различные варианты многорежимности и переходы между ними.

## 2. УРАВНЕНИЕ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Уравнения мелкой воды используются в геофизической гидродинамике для описания баротропных процессов. При этом применяются две серии численных экспериментов — с источниками–стоками и МГД методом генерации течений. В экспериментах с постоянными магнитами радиальный ток и вертикальное магнитное поле индуцируют азимутальные течения, на которые действует сила Кориолиса. В альтернативных экспериментах по методу источников–стоков направленные от источников к стокам

потoki отклоняются кориолисовой силой и закручиваются. Уравнение сохранения квазигеострофического потенциального вихря описывает волны Россби, распространение которых в основном и объясняет движение центров циклонов и антициклонов в численных и лабораторных экспериментах. В представленных далее численных экспериментах рассматривается образование различных крупномасштабных структур в результате притока энергии, связанного с конфигурациями постоянных магнитов и источников–стоков [Гледзер, 2014; Гледзер, 2015].

Далее приводится более подробный, чем в [Гледзер, 2014], вывод уравнений с учетом источников и стоков жидкости.

$$\text{Уравнение несжимаемости } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

интегрируется по толщине слоя жидкости в кювете от конического дна  $B(x, y)$  до свободной поверхности, которая и выражается, таким образом, суммой высоты дна кюветы и собственно толщины жидкости  $h$  в кювете:

$$w(x, y, h + B, t) - w(x, y, B, t) + \int_B^{h+B} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_B^{h+B} \frac{\partial v}{\partial y} dz = 0.$$

Граничное условие на свободной поверхности (верхнее)

$$\frac{\partial(h+B)}{\partial t} + u(x, y, h+B, t) \frac{\partial(h+B)}{\partial x} + v(x, y, h+B, t) \frac{\partial(h+B)}{\partial y} = w(x, y, h+B, t) \quad (1)$$

определяет вертикальную скорость на свободной поверхности.

Граничное условие на коническом дне кюветы (нижнее) должно учитывать приток жидкости от источника, который задается функцией  $q(x, y, t)$ :

$$\frac{\partial B}{\partial t} + u(x, y, B, t) \frac{\partial B}{\partial x} + v(x, y, B, t) \frac{\partial B}{\partial y} + q(x, y, t) = w(x, y, B, t) \quad (2)$$

и определяет вертикальную скорость на коническом дне.

Вычитание этих двух уравнений и подстановка результата в проинтегрированное уравнение несжимаемости дает уравнение эволюции толщины жидкого слоя ( $\tilde{u}, \tilde{v}$  – средние по толщине горизонтальные скорости):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{u}h)}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v}h)}{\partial y} = q(x, y, t);$$

$$\tilde{u}h = \int_B^{h+B} u dz, \quad \tilde{v}h = \int_B^{h+B} v dz$$

Уравнения Эйлера для горизонтальных компонент скорости  $u, v$  во вращающейся с угловой частотой  $\Omega_0$  кювете с учетом центробежного ускорения можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} - 2\Omega_0 v = \\ = -\frac{\partial \Pi / \partial x}{\sigma} + \Omega_0^2 x, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} + 2\Omega_0 u = \\ = -\frac{\partial \Pi / \partial y}{\sigma} + \Omega_0^2 y, \end{aligned}$$

где  $\sigma$  – постоянная плотность жидкости, а  $\Pi$  – давление, вычисляемое исходя из постоянного граничного значения на свободной поверхности жидкости (атмосферное давление), в приближении мелкой воды по гидростатической формуле  $\Pi(x, y, z, t) = \Pi_{atm} + \sigma g(h + B(x, y) - z)$  с участием формы дна  $B(x, y)$ .

В результате интегрирования по высоте уравнений Эйлера (3) с учетом граничных условий на дне (2) и на свободной поверхности (1) можно получить уравнения для потоков скоростей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\tilde{u})}{\partial t} + \frac{\partial(h\tilde{u}\tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\tilde{u}\tilde{v})}{\partial y} - 2\Omega_0(h\tilde{v}) = \\ = -gh \frac{\partial(h+B)}{\partial x} + \Omega_0^2 xh + q(x, y, t)\tilde{u}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\tilde{v})}{\partial t} + \frac{\partial(h\tilde{v}\tilde{v})}{\partial y} + \frac{\partial(h\tilde{v}\tilde{u})}{\partial x} + 2\Omega_0(h\tilde{u}) = \\ = -gh \frac{\partial(h+B)}{\partial y} + \Omega_0^2 yh + q(x, y, t)\tilde{v}. \end{aligned}$$

Внесение в правых частях под производные  $\partial/\partial x, \partial/\partial y$  центробежного ускорения  $\Omega_0^2 xh, \Omega_0^2 yh$  приводит к появлению параболоида вращения круговой кюветы. Форма параболоида вращения  $H_{par}(r)$  вычисляется с учетом сохранения массы жидкости при отклонении от толщины жидкого слоя  $H_0$  в состоянии покоя:

$$H_{par}(r) = H_0 - \frac{\Omega_0^2}{4g} (R_{out}^2 + R_{in}^2) + \frac{\Omega_0^2}{2g} r^2, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

В дальнейшем из системы (4) можно стандартно получить уравнения мелкой воды с генерацией движения источниками-стоками или МГД-методом в дивергентной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U^2}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{UV}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{gh^2}{2} \right) = \\ = F_U + 2\Omega_0 V - gh \frac{\partial(B - H_{par})}{\partial x} + F_h \frac{U}{h}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V^2}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{VU}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{gh^2}{2} \right) = \\ = F_V - 2\Omega_0 U - gh \frac{\partial(B - H_{par})}{\partial y} + F_h \frac{V}{h}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = F_h,$$

где  $U = h\tilde{u}, V = h\tilde{v}$  – полные потоки горизонтальной скорости, а физическими потоками для неизвестных  $\mathbf{Q} = (U, V, h)$  будут  $\mathbf{F}(\mathbf{Q}) = (U^2/h + gh^2/2, UV/h, U)$ ,  $\mathbf{G}(\mathbf{Q}) = (V^2/h + gh^2/2, VU/h, V)$ .

Вводится функция

$$R(x, y) = B(x, y) - \Omega_0^2 (x^2 + y^2) / (2g),$$

в которую входят все зависящие от координат величины, т.е. параболоид и наклон дна. Тогда правая часть представлена неконсервативными членами, в которую входят внешние силы, индуцирующие движение, а также кориолисово ускорение и градиент введенной функции  $R(x, y)$ .

Эту же форму (5) уравнения имеют в безразмерных переменных  $(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y) / R_{out}, \quad \hat{r}_{in, out} =$

$= R_{in,out}/R_{out}$ ,  $\hat{r}^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2$ ,  $\hat{t} = t\Omega_0$ ,  $(\tilde{U}, \tilde{V}) = (U, V)/$   
 $/(R_{out}\Omega_0 H_0)$ ;  $\tilde{h} = h/H_0$ ,  $\tilde{B} = B/H_0$ ,  $\tilde{H}_{par} = H_{par}/$   
 $/H_0 = 1 + \frac{1/2}{\tilde{g}} \cdot (\hat{r}^2 - 1/2)$ ; ускорение силы тяжести  
 представится через  $\tilde{g} = g \cdot H_0 / (R_{out}^2 \cdot \Omega_0^2)$ .

Внешний радиус Обухова–Россби  $R_E$  определяет масштаб распространения поверхностных гравитационных волн за время одного оборота кюветы:  $R_E = \sqrt{g \cdot H_0} / (2\Omega_0)$ . Выбор параметра  $\Omega_0$  задает величину  $\sqrt{g \cdot H_0} / (2\Omega_0)$ : размеры образующихся вихрей в канале должны быть значительно меньше, чем радиус Обухова–Россби  $R_E$ , который, в свою очередь, должен быть не менее чем радиус канала  $R_{out}$ . С другой стороны, моделируется быстровращающаяся планета Земля, поэтому период вращения должен быть достаточно малым. Заметим, что и число Россби оказывается тогда малым – угловые скорости вращения циклонов и антициклонов менее 0.1.

В безразмерном виде ускорение силы тяжести  $\tilde{g} = 4 \cdot (R_E / R_{out})^2$ , форма конического дна имеет вид  $\tilde{B} = (B_0 / H_0) \cdot (1 - \hat{r})$ , силы для источников-стоков  $\tilde{q} = q / (H_0 \Omega_0)$ .

Расчеты системы (5) с генерацией методом источников-стоков имеют компоненты правой части  $F_h = q(x, y, t)$ ,  $F_U = 0$ ,  $F_V = 0$  и проводились для параметров  $R_{in} = 7$  см,  $R_{out} = 35$  см,  $B_0 = 3$  см,  $H_0 = 9$  см, а период вращения кюветы  $T_0 = 2\pi/\Omega_0 = 6$  с,  $R_E \approx 44.86$  см.

Расчеты системы (5) с генерацией МГД-методом проводились для параметров  $R_{in} = 1.5$  см,  $R_{out} = 14.5$  см,  $B_0 = 0.8$  см,  $H_0 = 1.0$  см, а период вращения кюветы  $T_0 = 2\pi/\Omega_0 = 10$  или 11 с. Внешний радиус Обухова–Россби  $R_E \approx 24.92$  или (соответственно) 27.42 см.

Рельеф дна, необходимый для генерации волн Россби, был конической формы  $B(r) = B_0 \cdot (1 - r/R_{out})$ , спадающей до уровня платформы на внешнем крае кольца при  $r = R_{out}$ .

Величина  $q(x, y)$  описывает производительность источника, нагнетающего воду и отсасывающего такое же количество воды. В данной работе, как и в [Гледзер, 2014], аксиально-симметричная  $q(r)$  представлялась

функцией кусочно-гиперболической с нулевым интегралом от  $q(r)r$  (сохранение массы воды).

Двухпоточная конфигурация, состоящая из трех колец источников-стоков, описывается следующей осе-симметричной функцией источников-стоков массы:

$$q(r) = +E \frac{q_{in}}{r}, R_{in} \leq r \leq R_{in} + \Delta_R,$$

$$q(r) = +E \frac{q_{out}}{r}, R_{out} - \Delta_R \leq r \leq R_{out},$$

$$q(r) = +E \frac{q_C}{r}, R_C - (\Delta_C / 2) \leq r \leq R_C + (\Delta_C / 2),$$

где  $q_C = -(q_{in} + q_{out})\Delta_R / \Delta_C$ ,  $R_C = w_C R_{out} + (1 - w_C) R_{in}$ . Входящие постоянные  $q_{out}$ ,  $q_{in}$  задаются, а  $q_C$  вычисляется. Толщины внешнего и внутреннего колец  $\Delta_{out} = \Delta_{in} = 2$  см, центрального  $\Delta_C = 3$  см. Параметры  $q_{out}$ ,  $q_{in}$ ,  $q_C$  вместе с  $w_C$  указаны в таблице-ИС в соответствующих столбцах.

Трехпоточная конфигурация, состоящая из четырех колец источников-стоков с дополнительным кольцом ширины  $\Delta_{add}$  вблизи радиуса  $R_{add}$ ,

$$q(r) = +E \frac{q_{add}}{r},$$

$$R_{add} - (\Delta_{add} / 2) \leq r \leq R_{add} + (\Delta_{add} / 2),$$

и тогда  $q_C = -(q_{in} + q_{out})\Delta_R / \Delta_C - q_{add}\Delta_R / \Delta_C$ ,  $R_{add} = w_{add} R_{out} + (1 - w_{add}) R_{in}$ . Входящие постоянные  $q_{out}$ ,  $q_{in}$ ,  $q_{add}$  задаются, а  $q_C$  вычисляется. Толщины внешнего и внутреннего колец  $\Delta_{out} = \Delta_{in} = 1.5$  см, центрального  $\Delta_C = 1.5$  см, дополнительного  $\Delta_{add} = 1.5$  см. Параметры  $q_{out}$ ,  $q_{in}$ ,  $q_C$  вместе с  $w_C$ ,  $q_{add}$  и  $w_{add}$  указаны в табл. 1 в соответствующих столбцах.

Величина  $E$  задает мощность источников-стоков. При  $t_{on} < t < t_{off}$  величина  $E = E_{big}$ , вне этого промежутка времени  $E = E_{small}$ .

Для численных экспериментов МГД-методом внешнее воздействие осуществляется силой Ампера  $(1/c) \mathbf{j} \times \mathbf{H}$  в уравнениях для поля скорости и задается напряженностью магнитного поля  $\mathbf{H}$ . Магниты расставляются в кювете по концентрическим окружностям. Количество таких окружностей (колец) обозначено как  $N$  (см. табл. 2), количество магнитов в каждом кольце –

Таблица 1. Таблица-ИС – метод источников-стоков

Источники-стоки	$T_0, \text{с}$	$q_{out}$	$q_{in}$	$q_{add}; w_{add}$	$q_c; w_c$	$E_{small}$	$t_{on}/T_0$	$E_{big}$	$t_{off}/T_0$
ИС-2	6	−0.8	−0.5	—	+0.8667; 0.7	−0.2	20	−0.4	50
ИС-3	6	−0.8	−0.5	—	+0.8667; 0.75	−0.2	20	−0.4	50
ИС-4	6	−0.5	−0.2	—	+0.4667; 0.80	+0.2	20	+0.4	50
ИС-8	6	−0.5	+0.4	−0.35; 0.3	0.20833; 0.70	+0.2	20	+0.4	50
ИС-9	6	−0.8	−0.5	—	+0.8667; 0.75	+0.2	20	+0.4	50
ИС-12	6	−0.8	+0.4	−0.35; 0.3	0.30833; 0.70	+0.2	20	+0.4	50

Таблица 2. Таблица-ПМ – МГД-генерации течений

Параметры	ПМ-5	ПМ-6	ПМ-7	ПМ-10	ПМ-11
$T_0/\text{с}$	10	11	11	11	11
$N$	4	3	3	2	2
$n_i$	12; 12; 36; 36	10; 16; 24	10; 16; 24	10; 16	10; 16
$w_i$	0.2; 0.3; 0.6; 0.7	0.2; 0.5; 0.7	0.2; 0.5; 0.7	0.2; 0.6	0.2; 0.6
$a_i$	−1.0; −1.0; +1.0; +1.0	−2.0; +1.0; −0.5	−3.0; +0.5; −0.5	−1.0; +1.0	−2.0; −0.5
$E_{small}$	0.06	0.02	0.02	0.02	0.02
$t_{on}/T_0$	15	15	15	15	15
$E_{big}$	0.20	0.06	0.06	0.06	0.06
$t_{off}/T_0$	20	20	20	20	20

$n_i$  ( $i=1, \dots, N$  – возрастающий от внутренней границы к внешней индекс), радиус колец (расстояние от магнитов до оси кюветы) определяется через параметр  $w_i$  формулой  $R_i = R_{in} + (R_{out} - R_{in})w_i$ . Амплитуда силового поля варьируется через коэффициент  $a_i$ . Все эти параметры занесены в табл. 2 в соответствующие строки. Таким образом, для численных экспериментов при МГД-генерации в местах нахождения магнитов  $(F_h, F_U, F_V) = \{0, hEa_i y / r^2, -hEa_i x / r^2\}$ .

Для обеих серий экспериментов (с источниками-стоками и МГД-методом) в табл. 1 и 2 можно найти период вращения кюветы  $T_0$ , моменты включения  $t_{on}$  и отключения  $t_{off}$  большей силы воздействия. Также приведены и значения начальной меньшей силы  $E_{small}$  и большей  $E_{big}$ .

Рисунок 1 данной работы показывает схему установки в вертикальном сечении, а все дальнейшие рисунки, начиная с номера 2, относятся

к численным экспериментам с соответствующими номерами 2, 3 и т.д. в таблицах.

### 3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ

Численный метод решения системы уравнений (5) основывается на методе работ [Kurganov and Petrova, 2009; Kurganov and Tadmor, 2000], в которых он называется central upwind (центральная схема против потока), представляет собой переработку старого метода HLL 1970-х гг. [Harten et al., 1983], может применяться для расчетов газодинамических скачков, течений в речных руслах, а также некоторых расчетов двумерных движений несжимаемой жидкости и уравнения Гамильтона–Якоби. В одной из недавних работ [Kurganov et al., 2021a, Kurganov et al., 2021b] предлагались модификации этого метода, а в работе [Kurganov et al., 2021b] приводилось даже расширение для расчетов термических уравнений мелкой воды. Численная схема метода



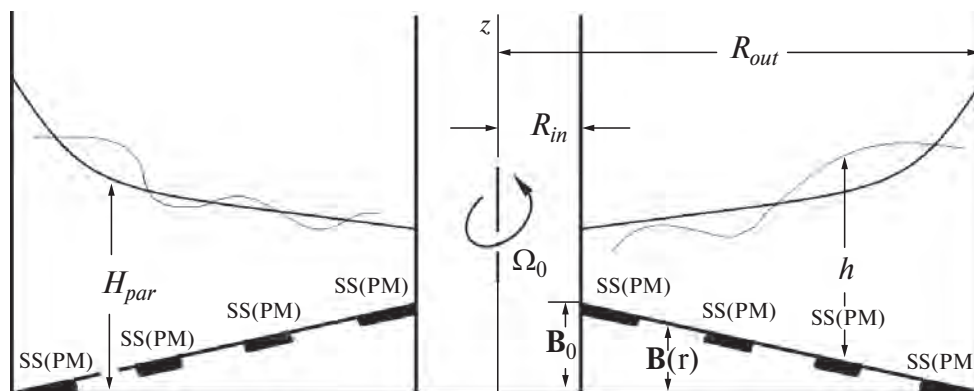


Рис. 1. Схема установки (вид в вертикальной плоскости). Символом SS(PM) обозначены положения источников и стоков (или постоянных магнитов). Описание остальных обозначений дано в тексте

применительно к данной задаче была довольно подробно представлена в [Kurganov and Tadmor, 2000], в этой статье дальнейшее рассмотрение ограничивается одномерной задачей с переменной  $x$ . Схему метода central upwind [Kurganov and Petrova, 2009; Kurganov and Tadmor, 2000], [Kurganov et al., 2001] в случае одной переменной  $x$  в полудискретном варианте можно представить в виде  $dQ_i/dt = -(\Phi_{i+1/2} - \Phi_{i-1/2})/\delta x$ , которая означает, что производная по времени от неизвестных  $Q$  в ячейке с центром  $x_i$  определяется разностью численных потоков  $\Phi$  на границах  $x_{i+1/2} = x_i + \delta x/2$ ,  $x_{i-1/2} = x_i - \delta x/2$  этой ячейки.

Сам же численный поток  $\Phi_{i+1/2}$ , определенный на границах ячейки, отличается в формальном выражении от физического потока  $F(Q)$  системы (5) и задается формулой следующего вида ([Kurganov and Petrova, 2009; Kurganov and Tadmor, 2000; Kurganov et al., 2021; Kurganov et al., 2021; Kurganov et al., 2001]):

$$\Phi_{i+1/2} = \frac{a_{i+1/2}^+ F(Q_i^E) - a_{i+1/2}^- F(Q_{i+1}^W)}{a_{i+1/2}^+ - a_{i+1/2}^-} + \frac{a_{i+1/2}^+ a_{i+1/2}^-}{a_{i+1/2}^+ - a_{i+1/2}^-} \cdot (Q_{i+1}^W - Q_i^E). \quad (6)$$

Определение численного потока согласно (6) означает, что численный поток на правой границе  $x_{i+1/2}$  ячейки с центром в  $x_i$  является неким средним весовым от физических потоков  $F(Q)$  уравнений мелкой воды (5) в самом правом (восточном,  $E$  – East) месте  $x_i^E$  этой ячейки с центром в  $x_i$  и самом левом (западном,  $W$  – West) месте  $x_{i+1}^W$  соседней ячейки с центром в  $x_{i+1}$  и искусственной (схемной) вязкости (последнее слагаемое

в (6)). Отметим, что в выражении для численных потоков участвуют скорости распространения сигнала. Последние, в свою очередь, определяются главным образом на основе собственных чисел

$$\Lambda_- = u - \sqrt{gh}, \quad \Lambda_+ = u + \sqrt{gh} \quad \text{якобиана} \quad \frac{\partial F}{\partial Q}(Q):$$

$$: a_{i+1/2}^+ \equiv \max \{ \Lambda_+(Q_{i+1}^W), \Lambda_+(Q_i^E), u_{i+1}^W, u_i^E, 0 \},$$

$$a_{i+1/2}^- \equiv \min \{ \Lambda_-(Q_{i+1}^W), \Lambda_-(Q_i^E), -u_{i+1}^W, -u_i^E, 0 \}.$$

Поскольку для задачи (5) скорость гравитационных волн  $\sqrt{gh}$  значительно превышает скорость движения жидких частиц  $u$ , то скорости  $|a^+| \approx |a^-|$ , но знаки отличаются:  $a^+ > 0$ ,  $a^- < 0$ .

Используя (6), можно получить численную схему

$$\begin{aligned} -\frac{dQ_i}{dt} \quad x = \Phi_{i+1/2} - \Phi_{i-1/2} = \\ = + \frac{a_{i+1/2}^+ F(Q_i^E) - a_{i+1/2}^- F(Q_{i+1}^W)}{a_{i+1/2}^+ - a_{i+1/2}^-} - \\ - \frac{a_{i-1/2}^+ F(Q_{i-1}^E) - a_{i-1/2}^- F(Q_i^W)}{a_{i-1/2}^+ - a_{i-1/2}^-} + \\ + \frac{a_{i+1/2}^+ a_{i+1/2}^-}{a_{i+1/2}^+ - a_{i+1/2}^-} \cdot (Q_{i+1}^W - Q_i^E) - \\ - \frac{a_{i-1/2}^+ a_{i-1/2}^-}{a_{i-1/2}^+ - a_{i-1/2}^-} \cdot (Q_i^W - Q_{i-1}^E). \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, в эволюции по времени неизвестных  $Q$  в ячейке с центром  $x_i$  участвуют неизвестные от точек  $i, i \pm 1, i \pm 2$ . Это неизбежно приводит к сглаживанию решения, т.е. к искусственной вязкости. Искусственная вязкость пол-

ностью устанавливает контроль над случайными возмущениями в схеме, без нее схема была бы неустойчивой.

Входящие в численную схему (6) неизвестные  $Q_{i+1}^W$ ,  $Q_i^E$  вычисляются по формулам линейной интерполяции [Kurganov and Petrova, 2009] с наклонами

$$\begin{aligned} Q_{i+1}^W &= Q_{i+1} + (Q_x)_{i+1} (x_{i+1/2} - x_i), \\ Q_i^E &= Q_i + (Q_x)_i (x_{i+1/2} - x_i). \end{aligned} \quad (8)$$

Наклон (the slope, согласно терминологии [Kurganov and Petrova, 2009]) численного решения, т.е. аналог производной по оси  $x$  вычисляется по правилу minmod [Kurganov and Petrova, 2009]:

$$(Q_x)_i = \text{minmod}_3 \left( \theta \frac{Q_i - Q_{i-1}}{\delta x}, \frac{Q_{i+1}^W - Q_{i-1}}{2\delta x}, \theta \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\delta x} \right),$$

где  $1 \leq \theta \leq 2$ .

Методика выявления искусственной вязкости в численной схеме немедленно покажет, насколько сильно происходит сглаживание по причине замены производных по пространству и времени разностными аналогами, она может быть применена к данной задаче, поскольку нет никаких разрывов решений (гидродинамических скачков). Реализация ее довольно затруднительна, поэтому к ней прибегают довольно редко, а в математических работах ее и вовсе нет, там выяснения свойств схемы проводят с помощью строгих аналитических неравенств и норм [Kurganov and Petrova, 2009]. Можно тем не менее получить дифференциальный аналог численной схемы (7), т.е. то дифференциальное уравнение, которое на самом деле аппроксимируется численной схемой. Это уравнение имеет «довесок» в правой части к решаемому уравнению, причем его порядок начинается от  $\delta x$ . Ниже оно приведено без дискретизации производной по времени в левой части, в пренебрежении слагаемыми, искажающими фазовую скорость переноса решения, также члены второго и выше порядков по шагу сетки не выписаны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &\approx +C_F \delta x g h \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_{vi} \delta x \sqrt{gh} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= +C_F \delta x \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + K_{vi} \delta x \sqrt{gh} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \\ C_F &= -\theta, \quad K_{vi} = +(1/2) + \theta. \end{aligned}$$

Для выяснения действия схемной вязкости можно рассмотреть устойчивость системы, пользуясь принципом «замороженности» коэффициентов. Решение  $U, h \propto \exp[i(\omega t - kx)]$  дает выражение для частоты  $i\omega = (-K_{vi} \pm C_F) \delta x k^2 \sqrt{gh} / 2$ .

При любом знаке имеется затухание возмущений во времени, т.е. искусственная вязкость полностью устанавливает контроль над случайными возмущениями в схеме, без нее схема была бы неустойчивой. Размер сетки  $150 \times 150$ , шаг по времени  $5 \cdot 10^{-4}$  с. Условие устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви налагает ограничение на шаг по времени  $\delta t \prec \delta x / \sqrt{gh}$ . Числовое выражение коэффициента искусственной вязкости  $\propto \delta x \sqrt{gh}$  значительно меньше, чем  $\propto (\delta x)^2 / \delta t$  в схеме Лакса–Фридрихса, и может соответствовать физическому затуханию. Действительно, в правой части коэффициент вязкого слагаемого в безразмерном виде оценивается как  $\propto \delta x \sqrt{gh} T_0 / (2\pi R_{out}^2)$ . Числовое значение его, исходя из параметров установки, составляет около  $1/30$ . Экспериментальные оценки дают примерно  $1/100$ .

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ

В экспериментах Обухова [Обухов и др., 1976; Гледзер и др., 1981] в качестве результатов могут быть только состояния перехода к новому направлению оси вращения вихря в эллипсоиде или отсутствия перехода к этому состоянию. Имеются интервалы времени, в которых, в зависимости от частоты вращения внешнего привода, могут осуществляться или не осуществляться переходы. В численных экспериментах в круговом канале возможностей конечных состояний в зависимости от длительности изменения и амплитуды притоков–оттоков жидкости или тока при МГД-генерации значительно больше.

Как результаты численных расчетов для конфигураций источников–стоков (табл. 1) и постоянных магнитов (табл. 3) показаны линии центров — зависимости от угловой координаты центров циклонов. Для этих линий увеличение или уменьшение наклонов вправо означает соответственно увеличение или уменьшение скорости перемещения центров по часовой стрелке в канале. Сводная таблица-ИС-ПМ (табл. 3) приводит итоговые об-

шие качественные выводы результатов расчетов в том порядке, в котором они приводятся в тексте далее.

На рис. 2 для эксперимента ИС-2 с источниками-стоками при параметрах, указанных в табл. 1, параметр  $E$  до момента  $t_{on} / T_0 = 20$  равен  $E_{small} = -0.2$ , затем  $E_{big} = -0.4$  до  $t_{off} / T_0 = 50$ , после чего значение  $E = E_{small} = -0.2$  восстанавливается. Сплошные вертикальные линии на рис. 2 отмечают времена переключения вели-

чины  $E$ . Рисунок 2 показывает изменение числа больших циклонических вихрей после восстановления значения параметра  $E = E_{small} = -0.2$ : при  $\tau = t_{on} / T_0 < 20$  было пять интенсивных циклонов, а при  $\tau = t_{off} / T_0 > 50$  их оказалось четыре. Это также демонстрирует рис. 2 сверху, где сгущение векторов выделяет циклонические образования, которые отмечены цифрами на линиях центров. На рис. 3 для эксперимента ИС-3 (табл. 1) количество интенсивных циклонов не меняется. Однако

Таблица 3. Таблица-ИС-ПМ (итоговая) – имеются ли изменения

Параметры	В количестве вихрей	В скорости перемещения	В расположении вихрей	Замечания
ИС-2	Да	Да	Нет	—
ИС-3	Нет	Да	Нет	—
ИС-4	Нет	Да	Нет	—
ПМ-5	Нет	Нет	Да	Поменялись местами вихри
ПМ-6	Нет	Нет	Да	Повороты структуры вихрей
ПМ-7	Нет	Нет	Да	Повороты структуры вихрей
ИС-8	Нет	Хаос	Да	Изменилась топология
ИС-9	Да	Нет	Да	Изменилась топология
ПМ-10	Да	Нет	Да	Изменилась топология
ПМ-11	Нет	Да	Да	Изменилась топология
ИС-12	Нет	Нет	Нет	Нет изменений

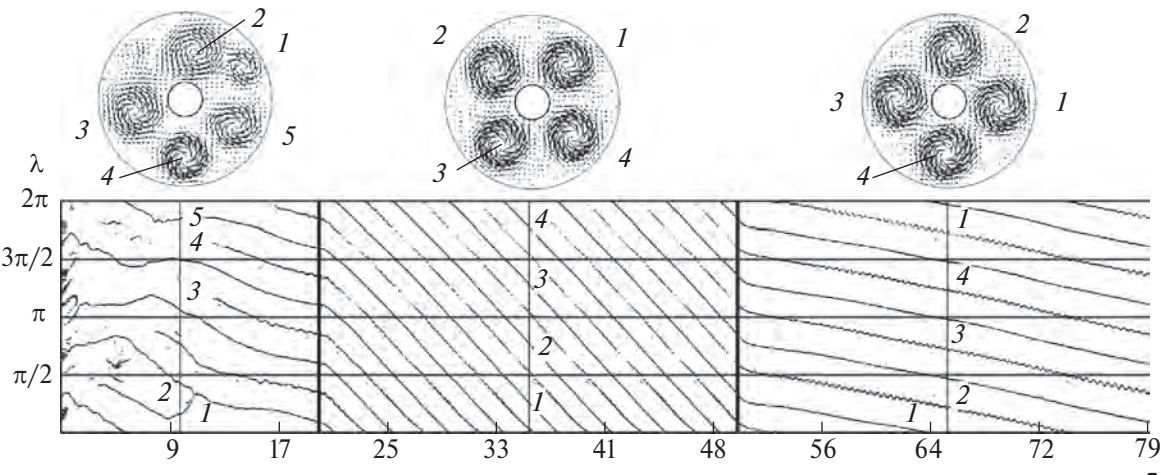


Рис. 2. Изменение во времени  $\tau = t/T_0$  азимутальных угловых координат  $\lambda$  центров циклонов в численных экспериментах двухпоточковой конфигурации с параметрами эксперимента, указанными в табл. 1 с номером ИС-2. Жирными линиями отмечены моменты переключений. Картинки течений показаны для моментов времени съемок  $\tau = 10, \tau = 35, \tau = 65$ , отмеченных тонкими вертикальными линиями. Цифрами отмечены номера вихрей в указанные моменты времени



уменьшилась угловая скорость их переноса по каналу: для сравнения жирной линией на линиях центров при  $\tau = t / T_0 > 65$  показан средний наклон линий, который был при  $\tau < 20$ . Циклонические вихри при  $\tau < 20$  двигались быстрее по каналу, чем при  $\tau > 50$ . Это же справедливо для эксперимента ИС-2 на рис. 2.

Такое же изменение скорости переноса по каналу на примере антициклонов наблюдается для эксперимента ИС-4 (табл. 1, рис. 4) с незначительными подвижками топологии течений после восстановления величины внешних сил.

На рис. 5 для антициклонов эксперимента ПМ-5 (табл. 2) показана противоположная картина, когда не менялось ни число, ни расположение антициклонов и отсутствовал перенос по каналам как при  $\tau < 15$ , так и при восстановлении величины внешней силы, хотя при усилении магнитного воздействия на временном интервале  $15 < \tau < 20$  произошел обмен расположением антициклонов: антициклон 3, который находился в секторе  $3\pi/2 < \lambda < 2\pi$ , перешел в положение  $\lambda \approx \pi/2$ , а антициклон 1, который до  $\tau = 15$  находился при  $\lambda \approx \pi/2$ , перешел в сектор  $\pi < \lambda < 3\pi/2$  с соот-

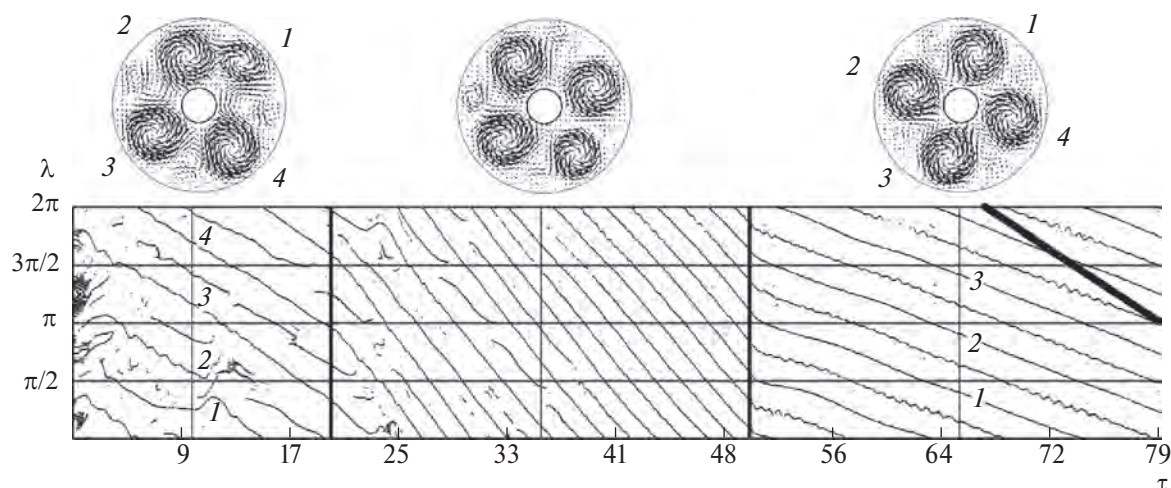


Рис. 3. Изменение во времени азимутальных угловых координат центров циклонов (табл. 1, ИС-03), двухпотоковая конфигурация, времена съемок  $\tau = 10$ ,  $\tau = 35$ ,  $\tau = 65$ . Цифрами отмечены номера вихрей в указанные моменты времени

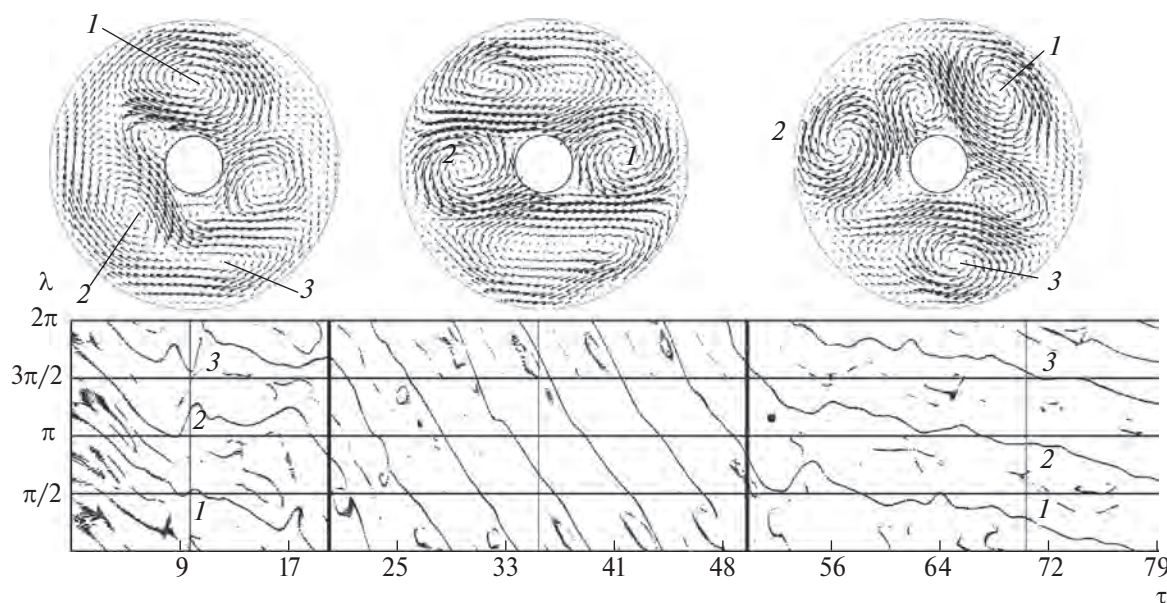


Рис. 4. Изменение во времени азимутальных координат центров антициклонов (табл. 1, ИС-04), двухпотоковая конфигурация, времена съемок  $\tau = 10$ ,  $\tau = 35$ ,  $\tau = 70$ . Цифрами отмечены номера вихрей в указанные моменты времени

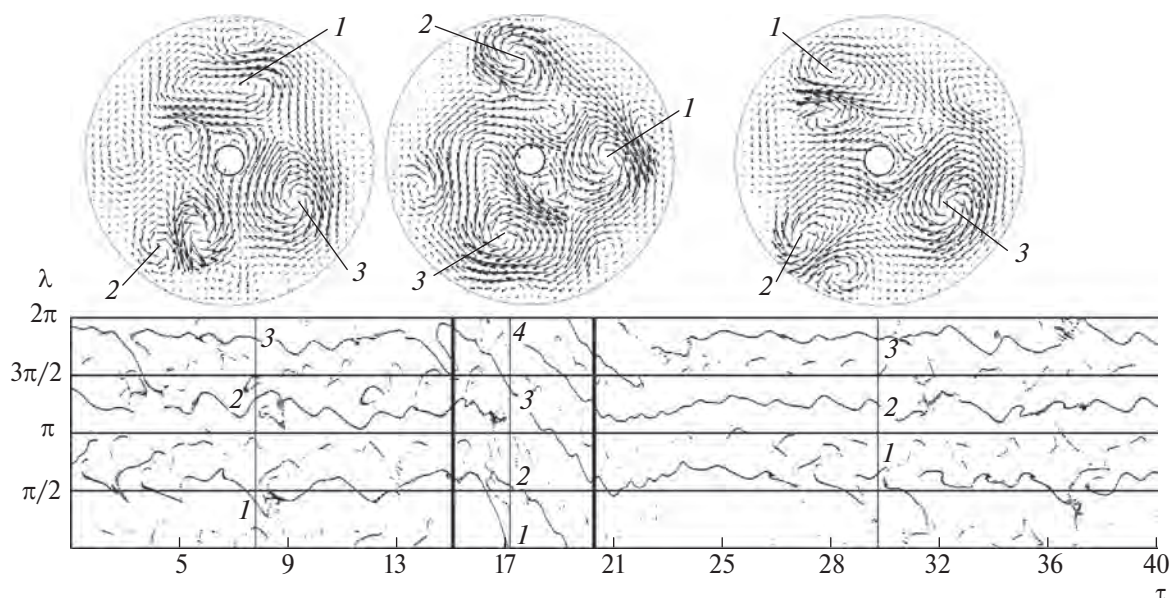


Рис. 5. Изменение во времени азимутальных координат центров антициклонов (табл. 2, ПМ-05), времена съемок  $\tau = 8$ ,  $\tau = 17$ ,  $\tau = 30$ . Цифрами отмечены номера вихрей в указанные моменты времени

ветствующим переходом антициклона 2 в сектор  $3\pi/2 < \lambda < 2\pi$ , хотя визуально в картине поля скорости изменения незначительны.

Аналогичные переходы можно видеть на рис. 6, 7 для циклонов в экспериментах ПМ-6, ПМ-7 (табл. 2), когда произошли повороты трехвихревой структуры циклонов на углы  $\pi/2$  и более при  $\tau > 20$ .

Линии центров на рис. 8 (ИС-8, табл. 1) демонстрируют хаотичные перемещения антициклонов в ограниченных секторах канала как до переключения внешнего воздействия при  $\tau < 20$ , так и после его возврата к прежним значениям при  $\tau > 50$ ,

хотя в интервале  $20 < \tau < 50$  происходило организованное перемещение антициклонов (наклон всех линий вправо). Но в картине поля скорости изменения при  $\tau > 50$  по сравнению с векторной картиной при  $\tau < 20$  заметны: циклоны сконцентрированы у центра канала.

Изменение числа вихрей наблюдается также на рис. 9 в эксперименте ИС-9 (табл. 1), когда три больших антициклона затем организовались в два противоположно расположенных, а скорость их перемещения по каналу не изменились. Такая же картина показана на рис. 10 для эксперимента ПМ-10 (табл. 2). Здесь, в отличие от рис. 9, нет регулярных перемещений циклонов и антициклонов

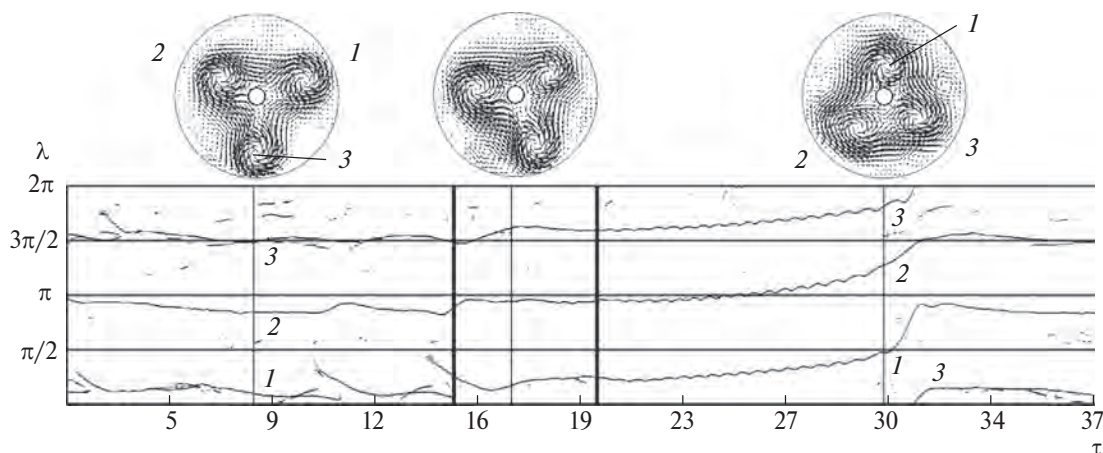


Рис. 6. Изменение во времени азимутальных координат центров циклонов (табл. 2, ПМ-06), времена съемок  $\tau = 8$ ,  $\tau = 17$ ,  $\tau = 30$ . Цифрами отмечены номера вихрей в указанные моменты времени



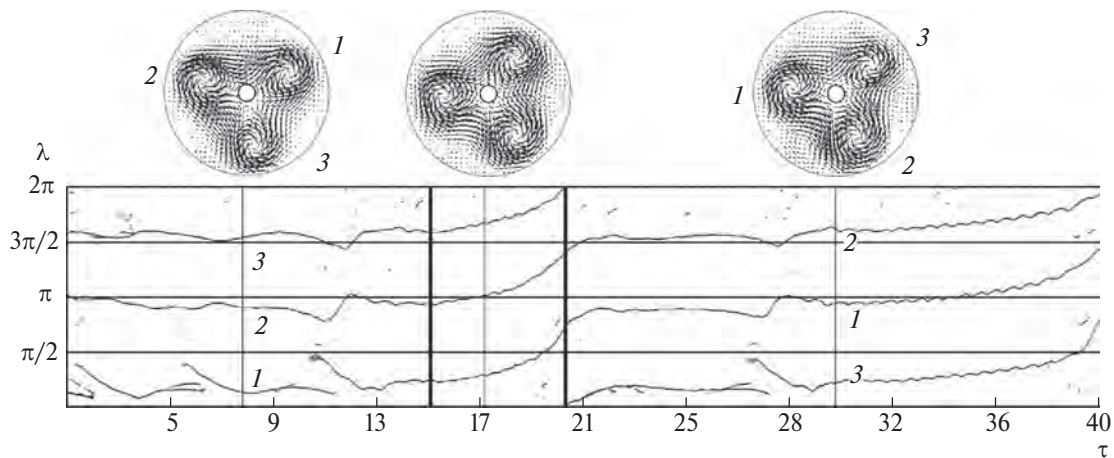


Рис. 7. Изменение во времени азимутальных координат центров циклонов (табл. 2, ПМ-07), времена съемок  $\tau = 8$ ,  $\tau = 17$ ,  $\tau = 30$ . Цифрами отмечены номера вихрей в указанные моменты времени

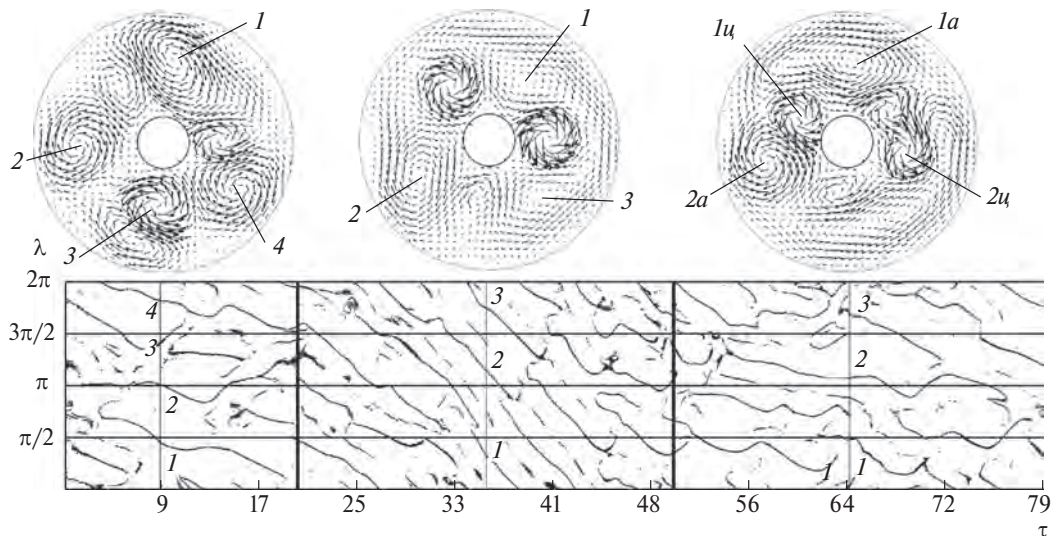


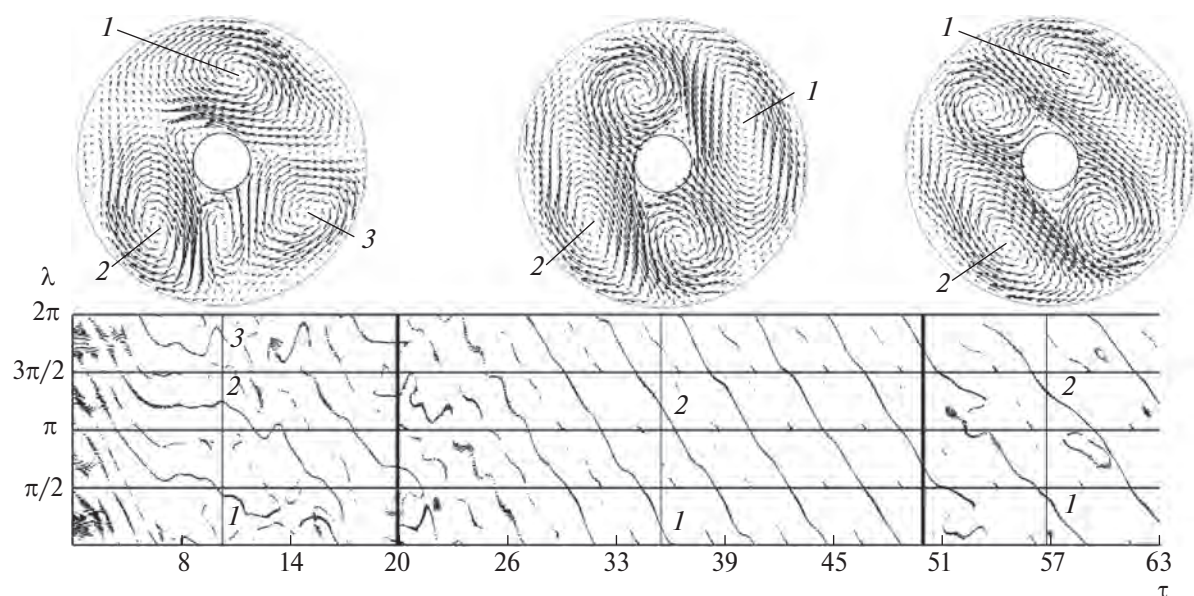
Рис. 8. Изменение во времени азимутальных координат центров антициклонов (табл. 1, ИС-08), трехпотоковая конфигурация, времена съемок  $\tau = 9$ ,  $\tau = 35$ ,  $\tau = 64$ . Цифрами отмечены номера вихрей в указанные моменты времени

по каналу, имеются их осцилляции в разных участках канала. Но изменилось их число — вначале наблюдались три интенсивных циклона и между ними слабые антициклоны, а затем остались два интенсивных циклона с усилением трех антициклонов.

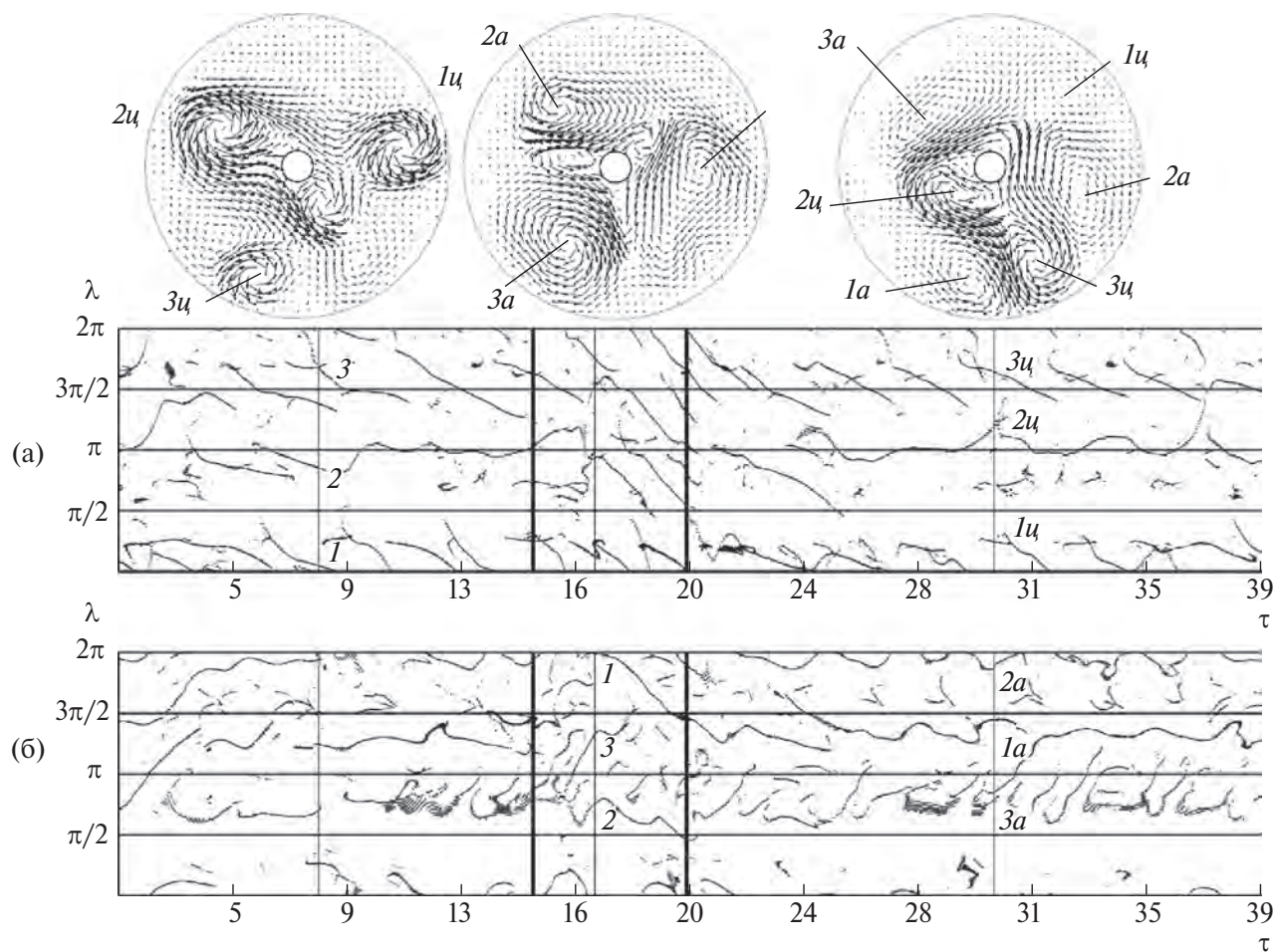
Если при неизменном расположении магнитов в эксперименте ПМ-10 изменить величины магнитного поля этих магнитов (параметры  $a_i$ , табл. 2, эксперимент ПМ-11), то векторные картины течений и линии центров меняются кардинально (рис. 11а, б). Вихри, которые вначале были локализованы у центра канала, разошлись по всему каналу. Более того, изменилось направление перемещения циклонов и антициклонов: если в эксперименте ПМ-10 (рис. 10) они совер-

шали осцилляции без регулярного перемещения, то в эксперименте ПМ-11 их движение идет уже против часовой стрелки (увеличение  $\lambda$ ) со значимыми изменениями скорости переноса при восстановлении внешнего воздействия при  $\tau > 20$ .

При параметрах эксперимента ПМ-11 проводилось исследование влияния длительности  $t_{off} - t_{on}$  и величины  $E_{big}$  внешнего аномального воздействия. На рис. 11в, г показаны линии центров циклонов при увеличении  $t_{off}$  до  $t_{off}/T_0 = 25$  с прежней, как и для рис. 11а, б, величиной  $E_{big} = 0.06$  (рис. 11в), и с увеличенной амплитудой аномалии до  $E_{big} = 0.10$  (рис. 11г). В обоих случаях режимы до момента  $t_{on}$  и после момента  $t_{off}$  практически совпадают, хотя для случая рис. 11г в интервале  $t_{on} < t < t_{off}$  произошло изменение режима течения

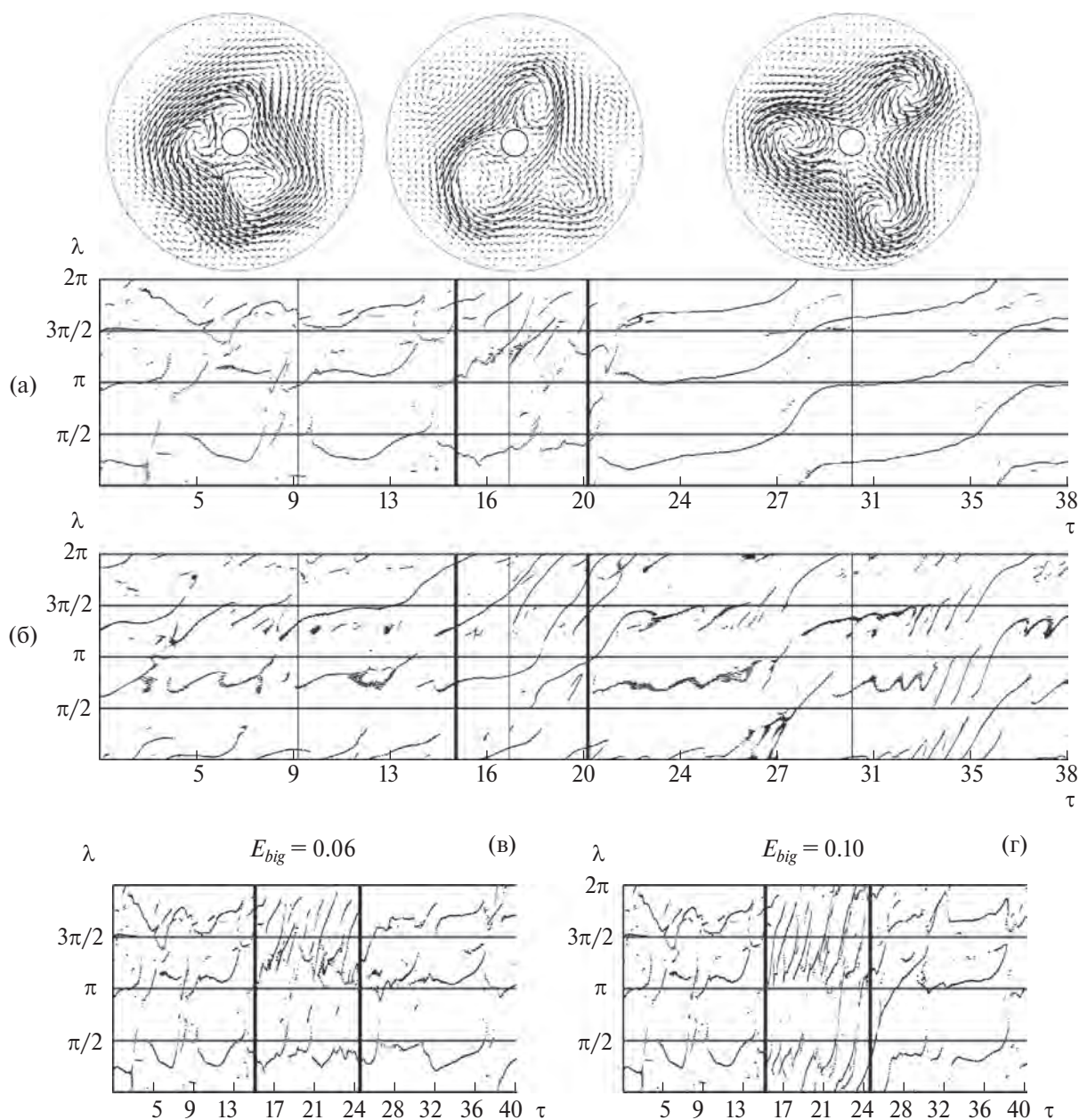


**Рис. 9.** Изменение во времени азимутальных координат центров антициклонов (табл. 1, ИС-09), двухпотоковая конфигурация, времена съемок  $\tau = 10$ ,  $\tau = 35$ ,  $\tau = 57$ . Цифрами отмечены номера вихрей в указанные моменты времени



**Рис. 10.** Изменение во времени азимутальных координат центров циклонов (а) и антициклонов (б) (табл. 2, ПМ-10), времена съемок  $\tau = 8$ ,  $\tau = 17$ ,  $\tau = 30$ . Цифрами отмечены номера вихрей в указанные моменты времени





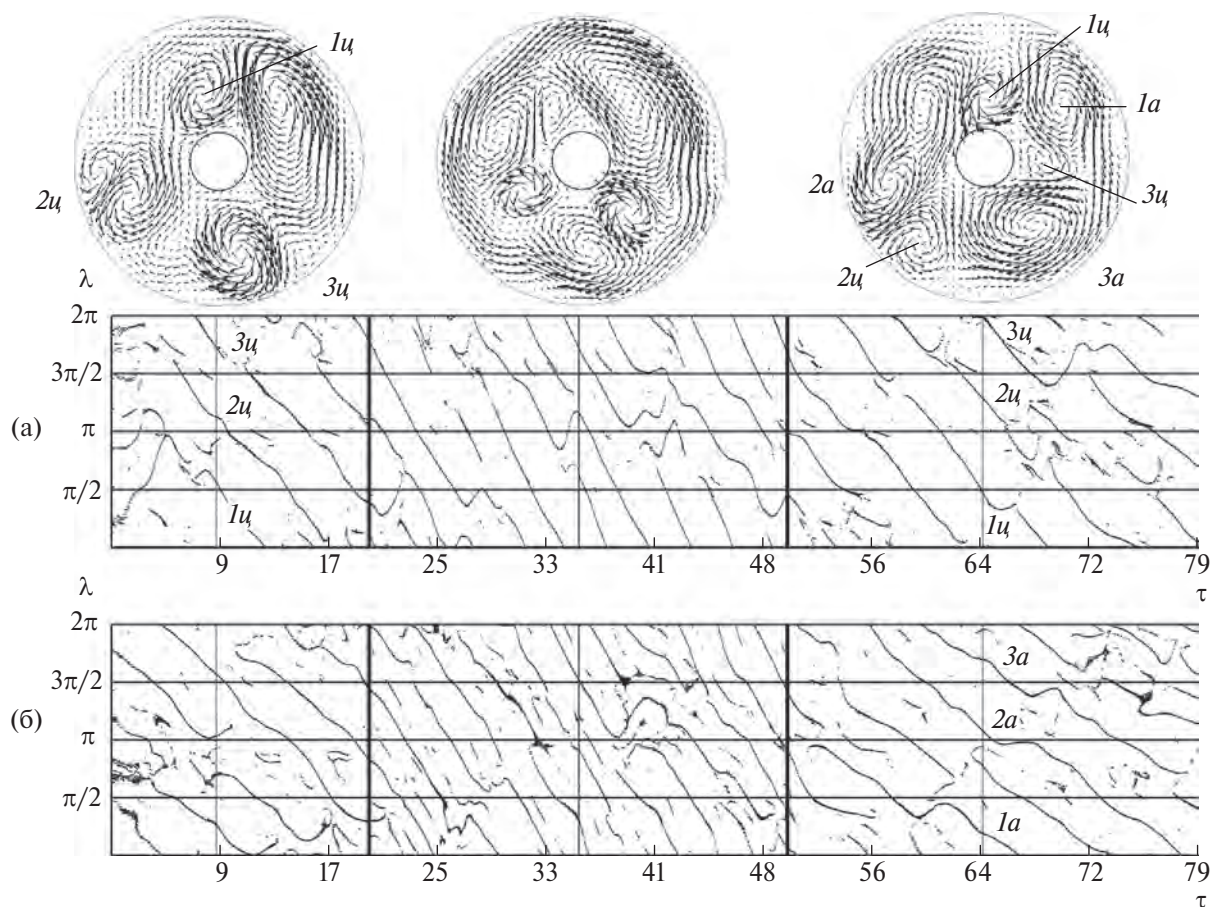
**Рис. 11.** Изменение во времени азимутальных координат центров циклонов (а) и антициклонов (б) (табл. 2, ПМ-11), времена съемок  $\tau = 9, \tau = 17, \tau = 30$ . Изменение во времени азимутальных угловых координат центров циклонов при  $t_{off}/T_0 = 25$  для значений внешнего воздействия  $E_{big} = 0.06$  (в),  $E_{big} = 0.10$  (г)

с увеличением скорости переноса циклонических вихрей. Но после момента  $t_{off}$  динамика вернулась на прежний режим.

Пример, когда изменения внешнего воздействия не приводят к каким-либо изменениям в поле скорости и угловой скорости перемещения циклонов и антициклонов по каналу, дает рис. 12 для эксперимента ИС-12 (табл. 1). Здесь переключение не изменило динамику вихрей совсем.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численные эксперименты во вращающемся круговом канале показали, что существует несколько возможных режимов течений в зависимости от длительности изменения и амплитуды притоков—оттоков жидкости или тока при МГД-генерации. Переходы между режимами осуществляются изменением величин основных параметров (мощность источников-стоков или



**Рис. 12.** Изменение во времени азимутальных координат центров циклонов (а) и антициклонов (б), (табл. 1, ИС-12), трехпоточная конфигурация, времена съемок  $\tau = 9$ ,  $\tau = 35$ ,  $\tau = 64$ . Цифрами отмечены номера вихрей в указанные моменты времени

величина тока, задающего силу Ампера при МГД-генерации), определяющих энергию поля скорости, с последующим восстановлением прежних значений параметров. Режимы отличаются как числом и расположением циклонических и антициклонических вихрей в потоке, так и скоростью их переноса по каналу.

Необходимо отметить, что численный метод решения системы уравнений (5) чувствителен к выбору аппроксимации градиента функции  $R(x, y)$  правой части (5), также к увеличению разрешения сетки. Делать выбор можно только по получении полноценной записи дифференциального аналога численной схемы (7). Расчеты с более сильным разрешением или с другими аппроксимациями градиента функции  $R(x, y)$  качественно согласуются с отдельными рассмотренными в разд. 4 случаями.

Особый интерес также представляют случаи, когда гидродинамическая система возвращается к исходным режимам. В большинстве случаев это происходило, когда вихревая картина течений была близка к квазистационарной при  $t < t_{on}$  и  $t > t_{off}$ : циклоны или антициклоны не переносились по потоку, а перемещались внутри некоторого сектора кругового канала. Это можно видеть на рис. 5, 8, 10. Редкие случаи показаны на рис. 11в, г и рис. 12, когда режимы течений (вихревой и существенного зонального переноса) сохранились и после аномально высокого уровня внешнего воздействия на жидкость в канале.

Все сказанное выше может иметь отношение к вопросу о воздействии локализованной во времени аномалии тепла. Но тогда, исходя из результатов расчетов, возникает вопрос, вернется ли атмосферная циркуляция к состояниям до аномального периода нагрева атмосферы.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарен О.Г. Чхетиани за внимание к работе.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 19-17-00248.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Гледзер А.Е.* Численная модель течений, генерируемых источниками и стоками в кольцевом вращающемся канале // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50. № 3. С. 331–343.
- Гледзер А.Е.* Генерация крупномасштабных структур и систем вихрей в численных экспериментах во вращающихся системах // Вычисл. мех. сплош. сред. 2015. Т. 8. № 4. С. 408–422.
- Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М.* Системы гидродинамического типа и их применение // М.: Наука, 1981. 366 с.
- Гледзер Е.Б., Пономарев В.М.* О вынужденном движении жидкости внутри эллипсоида // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1977. Т. 13. № 10. С. 1003–1008.
- Гледзер А.Е., Гледзер Е.Б., Хапаев А.А., Чхетиани О.Г.* Многорежимность в тонких слоях жидкости во вращающихся кольцевых каналах // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2021. № 4. С. 138–150.
- Должанский Ф.В.* Основы геофизической гидродинамики // М.: Физматлит, 2011. 264 с.
- Обухов А.М., Глуховский А.Б., Черноусько Ю.Л.* О явлениях переброса в простейших гидродинамических системах // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1976. Т. 13. № 11. С. 1123–1130.
- Gluhovsky A., Tong C., Agee E.* Selection of modes in convective low-order models // J. Atmos. Sci. 2001. V. 59. P. 1383–1393.
- Charney J.G., DeVore J.G.* Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking // J. Atmos. Sci. 1979. V. 36. P. 1205–1216.
- Harten A., Lax P.D., van Leer B.* On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws // SIAM Rev. 1983. V. 25. P. 35–61.
- Kallen E.* The nonlinear effects of orographic and momentum forcing in a low-order barotropic model // J. Atmos. Sci. 1981. V. 38. P. 2150–2163.
- Kallen E., Wiin-Nielsen A.C.* Non-linear, low order interactions // Tellus. 1980. V. 32. P. 393–409.
- Koo S., Ghil M.* Successive bifurcations in a simple model of atmospheric zonal-flow vacillation // Chaos. 2002. V. 12 (2). P. 300–309.
- Kurganov A., Liu Y., Zeitlin V.* Numerical dissipation switch for two-dimensional central-upwind schemes // Math. Mod. Num. An. (M2AN). 2021a. V. 55. P. 713–734.
- Kurganov A., Liu Y., Zeitlin V.* Thermal versus isothermal rotating shallow water equations: comparison of dynamical processes by simulations with a novel well-balanced central-upwind scheme // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 2021b. V. 115. P. 125–154.
- Kurganov A., Noelle S., Petrova G.* Semidiscrete central-upwind schemes for hyperbolic conservation laws and Hamilton-Jacobi equations // SIAM J. Sci. Comput. 2001. V. 23. № 3. P. 707–740.
- Kurganov A., Petrova G.* Central-upwind schemes for two-layer shallow water equations // SIAM J. Sci. Comput. 2009. V. 31. P. 1742–1773.
- Kurganov A., Tadmor E.* New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations // Journal of Computational Physics. 2000. V. 160. P. 241–282.
- Wallace J.M., Cheng X.* Does low-frequency atmospheric variability exhibit regime-like behavior? // Tellus. 1991. 43AB. P. 16–26.



# REGIMES AND TRANSITIONS OF HYDRODYNAMIC FLOWS IN A ROTATING ANNULAR CHANNEL (NUMERICAL EXPERIMENTS)

© 2025 A. E. Gledzer

*Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences,  
Pyzhevsky bystr., 3, Moscow, 119017 Russia*

*e-mail: aegledzer@gmail.com*

Numerical experiments study the possibility of the existence of different regimes of barotropic circulation in rotating closed annular channels, when the external influence increases for some time and then returns to its previous value while maintaining other flow parameters unchanged. The regimes differ both in the number of vortices in the flow or their location, and in the speed of transfer through the channel. It is also possible to return to a regime that is practically without difference from the original one after restoring the values of the parameters that determine the flow.

**Keywords:** annular channel, sources and sinks, MHD experiments, shallow-water equations, general circulation anomalies, blocking, Rossby waves